Analyse - TD n°5 : fonctions de référence

A/ Fonctions usuelles

Exercice 1 (résolutions graphiques d'équations et d'inéquations)
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
$(E_1): x^2 = 2; (I_2): x^2 < 4; (I_3): x^2 \geq 5$;
$(E_4): x^3 = -27; (I_5): x^3 \leq 8; (I_6): x^3 + 1 > 0$;
$(E_7): \frac{1}{x} = \pi; (I_8): \frac{1}{x} < 3; (I_9): \frac{1}{x} \geq -2$;
$(E_{10}): \sqrt{x} = 5; (I_{11}): \sqrt{x} \leq \frac{1}{4}; (I_{12}): \sqrt{x} > \sqrt{2}$;
$(E_{13}): |x| = 2; (I_{14}): |x| < \frac{1}{3}; (I_{15}): |x| \geq 1.$

Exercice 2 (résolutions algébriques d'équations et d'inéquations avec valeur absolue)
(1) Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1): |2x| = 4; (E_2): |x^2 - 4| = 12; (I_3): \left|\frac{1}{2}x + 3\right| < 8; (I_4): |3x - 5| \geq 13; (E_5): |x| + |4 - x| = 8$$

(2) On pose, pour tout réel x, $f(x) = |x - 1| + |2 + x| - |x|$.
(a) Représenter la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
(b) En déduire les solutions de $(E_1): f(x) = 3$ et $(I_2): f(x) \leq 2$.

Exercice 3 (fonctions affines : un problème d'optimisation)
Un fournisseur de télévision par satellite propose trois bouquets différents :
- Bouquet 1 : le client paie par mois 3€ par film ;
- Bouquet 2 : le client paie un abonnement mensuel de 40€, ce qui lui offre un nombre de films illimité ;
- Bouquet 3 : le client paie un abonnement mensuel de 20€, puis 1€ pour chaque film visionné.

Avec x un réel positif ou nul, pour x films visionnés, les nombres $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ donnent le prix mensuel à payer en euro avec les bouquets 1, 2 et 3 respectivement.
(1) Représenter graphiquement les fonctions f, g et h.
(2) En déduire quel bouquet est le plus avantageux en fonction du nombre mensuel de films visionnés.

Exercice 4 (fonctions affines : régionnement du plan)
(1) Un candidat à un examen doit avoir au moins 200 points pour être reçu. Avant de passer les 2 dernières épreuves d'économie (coefficient 3) et de langue vivante (coefficient 2), son total de points est de 158. Chaque note, avant d'être multipliée par son coefficient, est un nombre entier compris entre 0 et 20, et aucune note n'est éliminatoire.
On note x et y les notes obtenues par le candidat en économie et en langue vivante respectivement.
(a) Déterminer graphiquement les couples $(x; y)$ pour lesquels le candidat est reçu à l'examen. (On hachurera la partie du plan correspondante en couleur.)
(b) Déterminer graphiquement les couples $(x; y)$ pour lesquels le candidat est reçu à l'examen tout en ayant la note de 8 en économie est strictement moins de 15 en langue vivante.

(2) On utilise une sorbetière pour réaliser deux desserts glacés A et B à base de cocktail et de glace. Le dessert A nécessite 8 cl de cocktail et 2 dl de glace, tandis que le dessert B nécessite 5 cl de cocktail et 3 dl de glace. Par jour, on ne peut fabriquer au maximum que 1600 cl de cocktail et 600 dl de glace.
On note x et y les nombres de desserts A et B respectivement servis par jour.
(a) Déterminer graphiquement les couples $(x; y)$ possibles. (On hachurera la partie du plan correspondante en couleur.)
(b) Peut-on servir 60 desserts A et 180 desserts B par jour ? Peut-on servir 140 desserts A et 80 desserts B par jour ?
(3) Une société immobilière a acquis un terrain de 3200 m^2 sur lequel elle désire construire deux types d'immeubles : « Riviera » et « Estérel ». Chaque immeuble de type « Riviera » sera livré sur un terrain de 400 m^2, tandis que chaque immeuble de type « Estérel » sera livré sur un terrain de 800 m^2. Le prix de revient d'un immeuble de type « Riviera » est de 600 000 euros , tandis que celui d'un immeuble de type « Estérel » est de 300 000 euros. La société dispose d'une somme de 3 000 000 d'euros pour réaliser la construction de l'ensemble des immeubles.
On note x et y les nombres d'immeubles de type « Riviera » et « Estérel » à construire.
Déterminer graphiquement la liste des couples $(x; y)$ possibles. (On pourra faire un tableau récapitulatif : une colonne pour x et une colonne pour y.)

B/ Fonctions polynomiales et rationnelles

Exercice 5

(1) On considère les fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x^2; g: x \mapsto \frac{1}{7} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}; h: x \mapsto \frac{x^2+x+1}{3x^2+x+1}; k: x \mapsto x^2 + 3\sqrt{x} - x^3 + 12x + 5$$

(a) Pour chacune d'elle, indiquer si elle est polynomiale, rationnelle, ou ni polynomiale ni rationnelle.
(b) Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1): f(x) = 0; (E_2): g(x) = 0; (E_3): h(x) = 0$$

(2) On considère les fonctions suivantes :

$$u: x \mapsto x - \sqrt{x} + 1; v: x \mapsto \frac{2x(x+3)}{7}; w: x \mapsto \frac{6x^2+3}{x^2+\frac{1}{2}}; m: x \mapsto -x\sqrt{3} + x^3\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

(a) Pour chacune d'elle, indiquer si elle est polynomiale, rationnelle, ou ni polynomiale ni rationnelle.
(b) Résoudre les équations suivantes :

$$(E_4): v(x) = 0; (E_5): m(x) = 0; (E_6): u(x) = 0$$

(Pour (E_6), on commencera par résoudre l'équation $(E): t^2 - t + 1 = 0$ après avoir posé $t = \sqrt{x}$.)

Exercice 6

(1) Factoriser au mieux les polynômes $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X$ et $Q(X) = X^2 - 4X + 4$ et donner leurs racines réelles.
(2) On considère le polynôme $S(X) = 3X^3 - 13X^2 + 2X + 8$.
(a) Vérifier que 1 est une racine de S.
(b) En déduire une forme factorisée de S (2 méthodes).
(c) Donner l'ensemble de toutes les racines de S.

Exercice 7

(1) On pose $P_0(X) = X + 1$ et, pour tout entier naturel $n, P_{n+1}(X) = X^2 P_n(X) - 1$.

(a) Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3.

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré de P_n ainsi que son monôme de plus bas degré.

(2) On pose $Q_0(X) = -2X$ et, pour tout entier naturel $n, Q_{n+1}(X) = XQ_n(X) + X$.

(a) Expliciter les polynômes Q_1, Q_2 et Q_3.

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n, le degré de Q_n ainsi que son monôme de plus bas degré.

Exercice 8

(1) Soit m un nombre réel. On pose l'équation, d'inconnue x, (E_m): $mx^2 = (m-1)x + 1$.
Résoudre, suivant les valeurs de m, l'équation (E_m) dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit m un nombre réel. On pose l'équation, d'inconnue x, $(\mathcal{E}_m)$: $mx^2 + 2mx = 4x + 6$.
Résoudre, suivant les valeurs de m, l'équation $(\mathcal{E}_m)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9

(1) Effectuer la division euclidienne de $P(X) = 2X^5 - 6X^4 + 12X^3 + 2X^2 - 5X + 1$ par $X - 3$.

(2) Effectuer la division euclidienne de $Q(X) = 3X^5 + 2X^4 - 10X^3 + 4X^2 + 2X - 3$ par $X - 2$.

(3) Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^5 + X - 1$ par $X + 1$.

(4) Effectuer la division euclidienne de $B(X) = X^5 - X + 2$ par $X + 2$.

Exercice 10

(1) Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^5 - 2X^4 + 4X^3 - 7X^2 + X - 10$
par $B(X) = X^2 - 2X + 2$. Indiquez les degrés respectifs du quotient et du reste obtenus.

(2) Effectuer la division euclidienne de $C(X) = X^6 - 5X^4 + 4X^3 + 2X - 5$ par $D(X) = X^2 + 3X$.
Indiquez les degrés respectifs du quotient et du reste obtenus.

Exercice 11

Déterminer les fonctions polynomiales P de degré 2 vérifiant, pour tout réel x, $P(x) = P(2 - x)$.

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{15x-7}{3x+2}$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(2) (a) À l'aide d'une division euclidienne, déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = a + \frac{b}{3x+2}$$

(b) Sans utiliser de division euclidienne, déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = a + \frac{b}{3x+2}$$

(3) En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(t) = \frac{t^3-5t^2+6t-4}{t-1}$.

(1) Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^3 - 5X^2 + 6X - 4$ par le polynôme $X - 1$.

(2) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 4x + 2$.

(3) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Exercice 14

(1) Soient n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.
Donner la parité de la fonction f_n selon les valeurs de n.

(2) Soient les fonctions polynomiales $g: x \mapsto 14x^{12} - 7x^8 + 13x^6 + \frac{1}{19}x^4 - 11$,
$h: x \mapsto 7x^{13} + 68x^7 - \frac{2}{9}x^5 + 2x$ et $k: x \mapsto x^7 - \frac{1}{2}x^4$.
Étudier la parité de ces trois fonctions.

(3) Énoncer une règle générale permettant de donner la parité d'une fonction polynomiale quelconque.