

Algèbre et logique - TD n°6 : ensembles

Exercice 1

On donne les quatre ensembles suivants :

$$A = \{1; 2; 3; a; b; c\}, B = \{2; 9; 3; c; e; f\}, C = \{+; *; \heartsuit\} \text{ et } D = \{A; B\}$$

On note également Ω l'ensemble de ces quatre ensembles.

- (1) A-t-on $A \in \Omega$? A-t-on $A \subset \Omega$? Mêmes questions avec B, C et D (au lieu de A).
- (2) Peut-on trouver deux éléments x et y de Ω tels que $x \in y$? Et tels que $x \subset y$?
- (3) Déterminer les cardinaux des ensembles A, B, C, D et Ω .
- (4) Expliciter les ensembles $A \cup B, A \cap B, A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$. Donner leurs cardinaux respectifs.
- (5) Expliciter les ensembles $\mathcal{P}(D)$ et $\mathcal{P}(C)$. Donner leurs cardinaux.

Exercice 2

On donne les quatre ensembles suivants :

$$A = \{0; 1; 4\}, B = [-1; 3], C =]-\infty; 1] \text{ et } D = \{-3\} \cup \mathbb{R}^{*+}$$

- (1) Décrire les ensembles complémentaires (dans $\mathbb{R}$) de chacun de ces ensembles.
- (2) Déterminer les ensembles $B \cap \bar{C}$ ainsi que $\bar{A} \cup D$.
- (3) Représenter graphiquement les ensembles $B \times C$ et $D \times A$.

Exercice 3

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .

- (1) Démontrer que :

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

- (2) Démontrer que si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$.
- (3) Démontrer que $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$. (On pourra raisonner par équivalence.)
- (4) Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (cf. proposition 1 (5)).
- (5) Démontrer que :

$$(A \cup B = A \cap B) \Rightarrow A = B$$

- (6) Démontrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

(cf. proposition 1 (4))

- (7) Par égalités successives et en utilisant les propriétés de la réunion et de l'intersection, écrire le plus simplement possible l'ensemble $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Exercice 4

On appelle différence symétrique de A et B , notée $A \Delta B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à $A \cup B$ mais pas à $A \cap B$:

$$A \Delta B = \{x \in E \mid x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}$$

- (1) Écrire l'ensemble comme la différence de deux ensembles.
- (2) Démontrer (par double inclusion) que :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exercice 5

(1) On donne les deux ensembles $A = \{1; 2\}$ et $B = \{a; b; c\}$. Décrire l'ensemble $A \times B$.

(2) On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$A = [0; 4] \times [0; 10], B = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 9 - \frac{1}{4}x \right\} \text{ et } C = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Représenter graphiquement $A \cap B$ en bleu, puis $A \cap B \cap C$ en vert.

Exercice 6

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère n éléments de $\mathcal{P}(E)$ notés $A_1, A_2, \dots, A_n$.

(1) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer la première loi de Morgan généralisée :

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$$

(2) En déduire (sans utiliser de récurrence !) la deuxième loi de Morgan généralisée :

$$\overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k}$$

Exercice 7

On définit les suites géométriques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raisons respectives $q_1 = 2$ et $q_2 = \frac{1}{2}$, telles que $u_0 = 0,1$ et $v_0 = 100$.

On pose les ensembles $M = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq v_n\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{u_n}{v_n} \geq 2\}$.

Démontrer que $N \subset M$.

Exercice 8

Un numéro de sécurité sociale (INSEE) est un code écrit au format SAAMMDDCCCN – ϕ où :

- S est un chiffre binaire indiquant le genre de l'individu ;
- AAMM encode l'année et le mois de naissance de l'individu ;
- DDCCC est le code commune officiel de l'INSEE ;
- NNN est le rang de naissance de l'individu parmi ceux ayant les mêmes caractères qui précèdent ;
- le nombre ϕ est une clé calculée de façon unique à partir de tous les chiffres qui précèdent.

(1) Quel ensemble décrit les possibilités de la partie SAAMM ?

(2) Soit H l'ensemble des codes communes de France. On admet que $\text{card}(H) = 36000$ (pour simplifier).

Déterminer le nombre total de codes INSEE possibles.

(3) Si l'on introduisait un troisième caractère de type S pour les individus non-binaires, combien de codes supplémentaires pourrait-on alors créer ?

Exercice 9

Les anciennes plaques d'immatriculation étaient initialement écrites sous le format XXXX – LL – DD, où :

- XXXX est un nombre à quatre chiffres (le ou les premiers chiffres pouvant être nuls) ;
- LL est un couple de lettres (majuscules) ;
- DD est le code départemental.

(1) Quel ensemble décrit les possibilités de la partie XXXX ?

(2) Combien y-a-t-il d'éléments possibles pour LL ?

(3) Soit G l'ensemble des codes départementaux de France. On admet que $\text{card}(G) = 100$.

Déterminer le nombre total de plaques d'immatriculations que l'on pouvait produire.

(4) Dans certains départements, ce système est très vite arrivé à saturation (9999-ZZ-75). La première modification ayant été apportée consista à produire de nouvelles plaques au format XXXX-AAA-DD. Ce nouveau système permet-il de produire plus de plaques que le premier mis en place ? Justifier.

Exercice 10

Une urne opaque contient 8 boules :

- 3 boules vertes numérotées de 1 à 3 ;
- 5 boules rouges numérotées de 1 à 5.

On tire dans cette urne 3 boules successivement et avec remise (dans l'urne de la boule tirée avant d'en tirer une nouvelle).

- (1) Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- (2) Combien de tirages font apparaître au moins une boule verte ?
- (3) Combien de tirages font apparaître exactement une seule boule verte ?