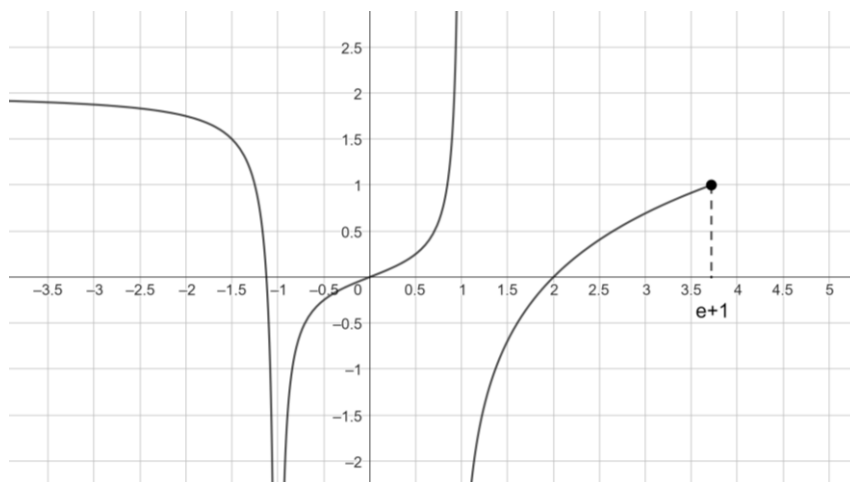


Analyse - TD n°8 : limites et continuité

Exercice 1 (lectures graphiques)

On considère la fonction f dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.



- (1) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- (2) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, donner leurs équations.
- (3) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- (4) (a) La limite de f en -1 existe-t-elle ? Si oui, à quoi est-elle égale ?
 (b) Même question pour la limite de f en 1 .
 (c) Même question pour la limite de f en 0 .
 (d) même question pour la limite de f en $e + 1$.

Exercice 2 (une allure possible)

Tracer dans un repère orthogonal du plan une allure possible de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f telle que :

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- La droite d'équation $y = -x - 3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$;
- $f(-2) = 2$;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$ existent et sont finies, mais $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ n'existe pas ;
- l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$;

Exercice 3 (des allures possibles)

(1) Dans chacun des cas suivants, tracer une allure possible de la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

- (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- (b) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ avec $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- (c) f est définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{5}$
- (d) f est définie sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

(2) Pour chacun des cas précédents, indiquer les éventuelles droites asymptotes horizontales ou verticales.

Exercice 4 (limites aux bornes et asymptotes)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition. Indiquer les éventuelles asymptotes verticales ou horizontales, le cas échéant.

$$(1) f: x \mapsto f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{5}{3} \quad (2) g: x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$(3) h: x \mapsto h(x) = 3x - \frac{\sqrt{x}}{5} \quad (4) k: x \mapsto k(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x-4}$$

Exercice 5 (calculs de limites)

Calculer les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{-2x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} 2x \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6-3x^4+2x^2+1}{8x^3-x+4} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-3}{\sqrt{x}+11} \quad (5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{50}$$
$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^3+2x^2+1}{2x^3-2x+789}\right)^2 \quad (7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2x^2)(x+1)}{7x^5-4} \quad (8) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)^4}{\sqrt{x}-1}\right)^3 \quad (9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{x^2-16}$$
$$(10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \quad (11) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}) \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^5}$$
$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x^2 + 1 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) \quad (14) \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9} - x\right) \quad (15) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9} - x\right)$$
$$(16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2-x+3}{4x^2-\frac{1}{x}}}$$

Exercice 6 (limites d'une fonction rationnelle, asymptotes)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{4x^2-7x+1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

- (1) (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (2) (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
(b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique aux voisinages des infinis.
- (3) Tracer une allure possible pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7 (limites de fonctions rationnelles, asymptotes)

On considère les fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$$
$$g: x \mapsto g(x) = \frac{x^2-5x+9}{x+1}$$
$$h: x \mapsto h(x) = \frac{3x^2-5x+7}{2x-1}$$

- (1) Déterminer les asymptotes verticales associées à chacune des courbes représentatives de ces fonctions.
- (2) Existe-t-il des asymptotes horizontales associées aux courbes représentatives de ces fonctions ?
- (3) Pour chacune des fonctions données, utiliser une division euclidienne de polynômes pour déterminer une droite asymptote au voisinage des infinis.

Exercice 8 (limites d'une fonction rationnelle, asymptotes)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ et de courbe représentative notée $\mathcal{C}$.

- (1) Déterminer la limite de f en 1. En déduire une équation d'une droite asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
- (2) Démontrer que la droite $(d): y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$. L'est-elle aussi au voisinage de $-\infty$?
- (3) Tracer une allure possible pour $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.

Exercice 9 (étude d'une branche infinie)

On considère la fonction $h: x \mapsto h(x) = 2\sqrt{x} - 7 + \frac{3}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- (1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h ainsi que ses limites aux bornes de cet ensemble.
- (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$. Qu'en déduit-on pour la branche infinie de $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$?
- (3) Tracer une allure possible pour $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.

Exercice 10 (études de continuité)

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition respectifs.

- (1) f est définie sur $[-2; +\infty[$ par $\begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{si } x \in [-2; 0[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$;
- (2) φ est définie sur $[1; +\infty[$ par $\begin{cases} \frac{x}{3} - 1 & \text{si } x \in [1; 3[\\ 2x - 3 & \text{sinon} \end{cases}$;
- (3) g est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} x - 3 & \text{si } x \in [0; 4[\\ \frac{4}{x} & \text{sinon} \end{cases}$;
- (4) ψ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \in [-1; +\infty[\\ \frac{3+x}{x-1} & \text{sinon} \end{cases}$;
- (5) h est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty; 2] \\ 3\sqrt{x+2} + 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
- (6) ζ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} 1 + 2\sqrt{x} & \text{si } x \in]-\infty; 4] \\ 2 - 3x + x^2 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 11

Soit a un nombre réel fixé. Dans les deux cas suivants, déterminer les valeurs de a pour lesquelles les fonctions considérées sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

- (1) f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ -\sqrt{x} + 3 & \text{sinon} \end{cases}$;
- (2) g est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} ax + x^2 & \text{si } x \in]-\infty; 3[\\ 4 - \frac{3}{x-2} & \text{sinon} \end{cases}$.