Probabilités - TD n°9: espaces probabilisés finis

Exercice 1

Pour chaque expérience aléatoire proposée :

(i) la modéliser à l'aide d'un univers adapté Ω (que l'on décrira sous forme ensembliste) ;

(ii) décrire les événements proposés sous forme ensembliste ;

(iii) déterminer les cardinaux de l'univers et de ces événements ;

(iv) calculer la probabilité de ces événements (après avoir donné la probabilité qui semble la plus adaptée).

(1) On tire une carte d'un jeu habituel de cinquante-deux cartes. On considère alors les événements :

A: « on obtient un valet »
B: « on obtient une carte de carreau »
C: « on obtient une paire d'as »
D: « on obtient une carte portant une valeur paire »

(2) On lance N pièces équilibrées, $N \in \mathbb{N}^*$. On examine alors les résultats obtenus. On considère alors les événements :

A: « toutes les pièces tombent sur le même côté »
B: « une pièce exactement tombe sur face »
C: « au moins une pièce tombe sur pile »
D: « en tenant compte de l'ordre des lancers, les résultats sont en alternance »

(3) On lance, dans l'ordre croissant du nombre maximal de faces, des dés équilibrés à respectivement quatre, six, huit, douze et vingt faces. On considère alors les événements :

A: « tous les résultats sont des un »
B: « tous les résultats sont les scores maximaux »
C: « tous les résultats sont des nombres premiers »
D: « les résultats obtenus sont, dans l'ordre, des nombres consécutifs »

(4) On lance trois dés à six faces - un vert, un blanc et un rouge - et on examine les résultats obtenus. On considère alors les événements :

A: « on obtient deux as parmi les trois résultats »
B: « les trois résultats obtenus se suivent consécutivement dans l'ordre dé vert, dé blanc puis dé rouge »
C: « les trois résultats obtenus se suivent consécutivement, sans tenir compte des couleurs »
D: « on obtient un triple »

Exercice 2

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tel que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.
Peut-on trouver un réel x tel que $P(\{\omega_1\}) = 5x^2$, $P(\{\omega_2\}) = x^2$, $P(\{\omega_3\}) = 3x$ et $P(\{\omega_4\}) = 2x$?

Exercice 3

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements de l'univers Ω tels que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$.

(1) Donner un encadrement (le plus fin possible) des nombres $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

(2) Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$ dans les deux cas suivants :

(a) A et B sont incompatibles ;

(b) $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Exercice 4

On considère une famille constituée de quatre enfants. On suppose équiprobables les naissances entre filles et garçons.

(1) Quelle est la probabilité que cette famille soit constituée de quatre filles ?

(2) Vous rencontrez trois enfants de cette famille : ce sont des filles. Quelle est la probabilité que le dernier enfant à rencontrer soit également une fille ?

(3) Le père de ces enfants, un éminent docteur, vous présente ses trois enfants les plus âgées : ce sont des filles. Quelle est la probabilité que l'enfant restant, le plus jeune donc, soit aussi une fille ?

Exercice 5

On suppose dans cette question que l'on dispose de deux dés à N faces, où $N \geq 3$, tous deux correctement équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à N.

(1) Démontrer qu'en sommant les résultats obtenus sur chaque face des deux dés lancés, le score le plus probable est $N + 1$.

(2) Quelle est la probabilité d'obtenir un double avec un lancer de ces deux dés ?

Exercice 6

(1) On dispose d'un jeu de 60 cartes, supposé bien mélangé, constitué de cartes pouvant être bleues, rouges, bicolores (bleues et rouges) ou incolores. Sachant que ce paquet contient 22 cartes rouges dont 12 cartes bicolores, ainsi que 24 cartes incolores, quelle est la probabilité de tirer une carte bleue monocolore ?

(2) Dans un groupe de 100 personnes, on en trouve 34 pratiquant les arts martiaux, 42 pratiquant le tennis et 12 gamers. De plus, 3 personnes sont gamers et pratiquent les arts martiaux, 24 personnes se pratiquent le tennis et les arts martiaux, 5 sont des gamers et pratiquent le tennis. Sachant que personne dans ce groupe n'appartient aux trois catégories à la fois, quelle est la probabilité, en interrogeant au hasard une personne de ce groupe, de tomber sur quelqu'un effectuant l'une au moins des trois activités présentées ?

Exercice 7

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A, B et C trois événements de l'univers Ω.

(1) À l'aide de la formule de Poincaré (pour deux événements), démontrer l'égalité suivante (la formule de Poincaré pour trois événements) :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(2) En déduire une deuxième méthode pour la question (2) de l'exercice précédent.

Exercice 8

On se donne une cible découpée en trois secteurs S_1, S_2 et S_3. On tire une flèche en direction de la cible. On considère alors les événements :

A_k: « la flèche atteint le secteur S_k »

R: « la flèche rate la cible »

On associe à cette expérience aléatoire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

(1) Justifier que la famille (A_1, A_2, A_3, R) forme un système complet d'événements de l'univers Ω.

(2) On suppose qu'il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall k \in \{1; 2; 3\}, P(A_k) = c \times k \text{ et } P(R) = 4 \times c$$

Déterminer la ou les valeurs de c possibles validant ces conditions.

(3) Généraliser le résultat précédent dans le cas où la cible est découpée en n secteurs ($n \in \mathbb{N}^*$) et en prenant pour $P(R)$ la valeur $(n+1)c$.

Exercice 9

Dans un lycée comptant 1000 élèves, tout élève est interne, externe ou demi-pensionnaire.

Ce lycée compte 600 filles. Lorsqu'on interroge un élève au hasard, la probabilité pour que cet élève soit un garçon interne est $0{,}18$ tandis que la probabilité pour que cet élève soit un garçon demi-pensionnaire est de $0{,}13$. Quelle est la probabilité pour qu'un élève interrogé au hasard soit un garçon externe ?