Analyse - TD n°10: dérivation, variations et convexité

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan d'origine $\mathcal{O}$.

(1) Démontrer que f est dérivable en 0.

(2) En déduire une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point $\mathcal{O}$ d'abscisse 0.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la valeur du réel a pour laquelle la fonction est continue sur son ensemble de définition. Examiner ensuite la dérivabilité de la fonction obtenue au point de raccordement.

(1) La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \begin{cases} ax + x^2 \text{ si } x < 3 \\ 4 - \frac{3}{x-2} \text{ sinon} \end{cases}$.

(2) La fonction ψ est définie sur $[3; +\infty[$ par $\psi(x) = \begin{cases} -2x + a \text{ si } x \geq 4 \\ \frac{2+3x}{x-2} \text{ sinon} \end{cases}$.

(3) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x \text{ si } x < 1 \\ -\sqrt{x} + 3 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 3

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer sa fonction dérivée (on ne demande pas les ensembles de définition et de dérivabilité). Donner également l'équation de la tangente T_{-2} à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2, lorsqu'elle existe.

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 5$$

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$h(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$$

$$j(x) = \left(\frac{x+2}{x^2}\right)^4$$

$$k(x) = 3\sqrt{x^2+1}$$

$$p(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$$

$$m(x) = x + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{1-x^2}$$

$$n(x) = \frac{3}{(1-8x)^7}$$

$$\ell(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k \text{ (où } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{x^k} \text{ (où } n \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice 4

(1) Soit u une fonction définie, dérivable et monotone sur un intervalle I.

Démontrer que la fonction $f: x \mapsto \big(u(x)\big)^3$ est monotone, de même variations que u sur I.

(2) Soit u une fonction définie, dérivable et monotone sur un intervalle I, à valeurs strictement positives. Démontrer que la fonction $g: x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est monotone, de mêmes variations que u sur I.

Exercice 5

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

(a) déterminer son ensemble de définition ;

(b) déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition ;

(c) déterminer son ensemble de dérivabilité et sa fonction dérivée ;

(d) étudier le signe de sa fonction dérivée et ses variations (on dressera son tableau de variations complet).

$f(x) = -x^3 + 3$	$k(x) = \sqrt{5-2x}$
$g(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$	$m(x) = -2(3+4x)^5$
$h(x) = \frac{2x-4}{x^2-1}$	$n(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$

Exercice 6

Soient les fonctions f et g définies sur les intervalles $I =]4;8]$ et $J = [-\frac{2}{3};3[$ respectivement par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 3 \text{ et } g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$$

Déterminer un encadrement de $f(x)$ sur I et un encadrement de $g(x)$ sur J.

Exercice 7

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $f(0) = -1$ et $f(4) = 3$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0;4[$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$.

(1) Dresser le tableau des variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer un majorant et un minorant de f sur l'intervalle $[-3;5]$. La fonction est-elle bornée sur l'intervalle $[3;+\infty[$?

(3) On suppose dans cette question que $f(-3) = f(1{,}25) = 0$. Dresser alors le tableau des signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit n un entier naturel non nul fixé. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$$

(1) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

(2) Déterminer, pour tout réel x, le nombre $f_n{}'(x)$.

(3) Dresser le tableau des variations de la fonction f_n dans les deux cas, n pair ou n impair.

Exercice 9

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 7}$$

On considère également la fonction $f: x \mapsto \sqrt{2x+7}$.

(1) Calculer u_1 et u_2 .

(2) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et positif.

(3)

   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

   (b) Déterminer les variations de la fonction f sur son ensemble de définition, après avoir déterminé sa fonction dérivée.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 0.

(4)

   (a) Résoudre l'équation $(E): f(x) - x > 0$ dans $\mathbb{R}^+$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 10

Pour chacune des fonctions proposées :

(a) déterminer son ensemble de définition ;

(b) calculer ses dérivées première et seconde, en précisant leurs ensembles de définition ;

(c) étudier sa convexité et donner les éventuels points d'inflexion.

(1) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + 1$ (2) $g : x \mapsto 6 - x\sqrt{x}$ (3) $h : x \mapsto 3x^5 - 7x^4 + 2x - 1$

Exercice 11

Pour chacune des fonctions proposées :

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Déterminer la fonction dérivée f' de f après avoir donné son ensemble de dérivabilité.

(c) Déterminer l'ensemble des réels a en lesquels la tangente T_a , à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, est parallèle à la droite (d) :

- d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ dans le (1) ;
- d'équation $y = x$ dans le (2).

(d) Pour chacune de ces tangentes, étudier sa position relative avec $\mathcal{C}_f$.

(1) $f : x \mapsto 3\sqrt{x+2} - x$ (2) $g : x \mapsto \frac{2x-3}{1+x}$

Exercice 12

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 - 5$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

(1) Démontrer que $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion.

(2) Déterminer l'équation cartésienne réduite de chacune des deux tangentes à $\mathcal{C}_g$ en chacun de ces deux points.

(3) Étudier les positions relatives de ces deux tangentes par rapport à $\mathcal{C}_g$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 14x + 12$.

(1) Déterminer, pour tout réel x, les nombres $f'(x)$ et $f''(x)$.

(2) Déterminer les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

(3) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) \geq 11 - 10x$.

(4) La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f présente-t-elle un point d'inflexion ?

Exercice 14

On donne, pour une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
variations de f'	-2	0	3	0	$-\infty$

(1) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

(3) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2, 0 et 7. Donner une allure possible pour la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.