Algèbre et logique - TD n°11 : calcul matriciel

Exercice 1

(1) Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\\ -5 & 0\end{pmatrix}$,
$E=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 6 & 7\end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix}8 & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Calculer :

(a) $2.A+B$

(b) $-3.C+5.D$

(c) $5.E-3.F$

(2) Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 12 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
et $F=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ -2 & -6\end{pmatrix}$.

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

(a) $x.A+y.B=C$

(b) $x.D+y.E=F$

Exercice 2

Dans chaque cas, calculer le produit AB lorsqu'il est bien défini :

(1) $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$; (2) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; (3) $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 6\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

(4) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 6\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; (5) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

(6) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -5 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; (7) $A=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -5 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 4 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$;

(8) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 8 & 10\end{pmatrix}$; (9) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 8 & 10\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(10) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 6\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 8 & 10\end{pmatrix}$; (11) $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$;

(12) $A=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3 & -4\end{pmatrix}$; (13) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

Exercice 3

(1) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliciter, pour tout entier naturel n non nul, A^n. (On pourra commencer par calculer A^2, A^3 et A^4.

(2) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Expliciter, pour tout entier naturel n non nul, A^n.

(b) Expliciter, pour tout entier naturel n non nul, B^n.

(3) Expliciter, pour tout entier naturel n non nul, la matrice A^n dans chacun des cas suivant :

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} Q$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(P; Q) \in \left(M_2(\mathbb{R})\right)^2$, tel que $QP = I_2$.

(4) Que peut-on conjecturer concernant les puissances d'une matrice diagonale ? Comment démontrerait-on ce résultat ?

Exercice 4

On dit qu'une matrice carrée M est idempotente si, et seulement si, elle vérifie l'égalité $M \times M = M$.

(1) *Exemples et quelques propriétés*

(a) La matrice I_3 est-elle idempotente ? Et la matrice I_n (où n est un élément de $\mathbb{N}^*$) ?

(b) Proposer un autre exemple « simple » de matrice idempotente.

(c) Déterminer un réel a non nul tel que la matrice $H = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$ soit idempotente.

(d) La somme de deux matrices idempotente est-elle nécessairement idempotente ?

(e) Soient n un entier strictement positif et M une matrice idempotente d'ordre n.
On pose $N = I_n - M$. Montrer que N est idempotente.

(2) *Application à l'étude des puissances d'une matrice*

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $D = I_2 - C$ et $B = 2.C + D$.

(a) La matrice C est-elle idempotente ? Et la matrice D ?

(b) Calculer DC.

(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$B^n = 2^n C + D$$

(d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, une expression explicite de B^n.

Exercice 5

Une certaine espèce de scarabée ne vit au maximum que trois ans.

Une année a_0, on considère une famille de ces scarabées composée de trois groupes d'âges : ceux du groupe x_0 sont dans leur première année, ceux du groupe y_0 sont dans leur deuxième année et ceux du groupe z_0 sont dans leur troisième année.

On suppose que les effectifs des trois groupes d'âges des scarabées l'année $a_0 + 1$ s'obtiennent à partir de ceux de l'année a_0 de la façon suivante :

- une moitié des scarabées meurt dans sa première année ;
- les scarabées qui en sont à leur deuxième année donnent chacun naissance à un scarabée et les deux tiers de ces scarabées meurent durant leur deuxième année (après avoir donné naissance) ;
- les scarabées qui en sont à leur troisième année donnent naissance à 3 scarabées avant de mourir.

(1) On note x_1 le nombre de scarabées de cette famille qui sont dans leur première année, y_1 le nombre de scarabées qui sont dans leur deuxième année et z_1 le nombre de scarabées qui sont dans leur troisième année, l'année qui suit celle considérée au départ.
Exprimer x_1, y_1 et z_1 en fonction de x_0, y_0 et z_0.

(2) Soient les matrices $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.
Déduire de la question précédente une relation entre ces trois matrices.

(3) Plus généralement, on suppose que le processus d'évolution évoqué entre l'année a_0 et $a_0 + 1$ est valable pour deux années consécutives quelconques.
On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, x_n le nombre de scarabées de la famille considérée qui sont dans leur première année, y_n le nombre de scarabées qui sont dans leur deuxième année, z_n le nombre de scarabées qui sont dans leur troisième année, n années après celle considérée initialement (c'est-à-dire l'année $a_0 + n$). On pose alors $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre les matrices U_{n+1}, U_n et A.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, une relation entre les matrices U_n, U_0 et A.

(c) Les coefficients de la matrice A^{50}, arrondis à 10^{-4} près, sont donnés par la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 & 1{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}0667 & 1{,}1333 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour la famille de scarabées considérée ?