Probabilités – TD n°12 : conditionnement et indépendance en probabilités

Exercice 1

Sur Orion, deux partis politiques s'affrontent : les Rigos et les Tristos.
On sait qu'il y a trois fois plus de partisans pour les Rigos que pour les tristos.
Tout habitant d'Orion appartient nécessairement à un -et un seul- des deux partis.
Pour le prochain vote, on propose un projet de loi sur la PAX. D'après les estimations effectuées (sur lesquelles on s'appuiera) :

- 60% des Rigos y sont favorables et 16% y sont opposés ;
- chez les Tristos, 68% s'opposent au projet et 20% sont sans opinion.

Vous rencontrez au hasard un individu d'Orion (quelle qu'en soit la probabilité, vous avez réussi) et vous lui demandez son opinion concernant le projet de loi PAX.

(1) Quelle est la probabilité qu'il soit sans opinion?

(2) L'individu vous a dit qu'il était favorable au projet de loi PAX. Quelle est la probabilité qu'il soit un Rigos ?

(3) On suppose ici qu'il vous a répondu être opposé au projet de loi PAX. Quelle est la probabilité qu'il soit un Tristos ?

Exercice 2

Sur une notice de test pour une certaine pathologie, la qualité du test est ainsi précisée :

- le test, pratiqué sur une personne affectée, est positif dans $99{,}8\%$ des cas ;
- le test, pratiqué sur une personne non affectée, est négatif dans $99{,}6\%$ des cas ;
- la pathologie affecte une personne sur $100\ 000$ dans la population.

(1) Calculez la probabilité qu'une personne soit réellement affectée après avoir découvert que son test est négatif.

(2) Calculez la probabilité qu'une personne soit réellement affectée après avoir découvert que son test est positif.

(3) Que recommanderiez-vous à une personne ayant découvert que son test est positif alors qu'elle cherche à savoir si elle est affectée ?

Exercice 3

On a mis au point un test de dépistage d'une certaine maladie qui réagit de la façon suivante :

- le test réagit positivement pour un quart de la population totale ;
- le test réagit positivement dans huit cas sur dix chez les malades testés ;
- le test réagit positivement dans un cas sur dix chez les individus sains testés.

(1) Quelle est la probabilité qu'un individu de cette population, pris au hasard, soit atteint par cette maladie ?

(2) On décide de vacciner un quart de la population. On dénombre $\frac{1}{12}$ de malades parmi les vaccinés, mais dans la population des malades, il y a quatre non-vaccinés pour un vacciné.
Quelle est ainsi la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

(3) Comparer les probabilités, pour un individu, de tomber malade avec ou sans vaccin.

Exercice 4

On dispose de n urnes ($n \in \mathbb{N}^*$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires, supposées indiscernables au toucher.
On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 5

On dispose de trois cartes : une double-face rouges, une double-face blanches et une dernière ayant une face rouge, l'autre blanche. On tire une carte au hasard et on en montre une face. On parie sur la couleur de l'autre face.
(1) Quelle est la probabilité que l'autre face soit effectivement de même couleur que la première ?
(2) Dans ce jeu, l'organisateur propose au parieur de miser m euros et de le rétribuer d'un montant égal si l'autre face et d'une couleur différente à celle visible.
Le pari est-il rentable pour le parieur ?

Exercice 6

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches.
On tire successivement 3 boules :
- si on tire une noire, on l'enlève ;
- si on tire une blanche, on la retire et on ajoute une noire à la place.

Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

Exercice 7

On dispose de deux pièces : une non truquée et une truquée (avec deux piles). On lance un dé classique, non pipé :
- si on obtient 1, on lance deux fois la pièce non truquée ;
- sinon, on lance deux fois la pièce truquée.

On considère alors les événements :

A: « on obtient pile au premier lancer de la pièce »
B: « on obtient pile au deuxième lancer de la pièce »
C: « le lancer du dé donne 1 »

(1) P désignant la probabilité uniforme, calculer $P(A), P(B)$ et $P(C)$.
(2) Démontrer que les événements A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité P, mais qu'ils le sont pour la probabilité P_C.

Exercice 8

Une boite de chocolats *roulette russe* propose douze chocolats d'aspects identiques, l'un (unique) d'entre eux étant fourré avec un piment extra-fort. Douze personnes décident de se partager les chocolats. Pour cela, ils se donnent un ordre arbitraire (personne p_1, puis personne p_2, etc.) dans lequel chacun va choisir un chocolat, le manger, puis laisser la personne suivante faire de même avec les chocolats restants.
Cette procédure est-elle équitable pour toutes ces personnes ?

Exercice 9

Une urne contient N boules blanches, n boules noires et $N - n$ boules rouges ; où N, n et $N - n$ sont trois entiers supérieurs ou égaux à 3.

(1) On tire trois boules avec remise.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ?

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage bicolore ?

(2) Mêmes questions avec un tirage sans remise.

Exercice 10

Tous les matins, André se demande s'il va manger des pancakes ou des céréales. Pour cela, et sachant qu'il n'optera que pour l'une et une seule de ces options de petit-déjeuner, il suit le protocole suivant :

- s'il a mangé des pancakes un matin, il décide de manger des céréales le lendemain s'il obtient pile en lançant une pièce équilibrée (il mangera de nouveau des pancakes sinon) ;
- s'il a mangé des céréales un matin, il lance deux pièces équilibrées : dans le cas où il obtient deux faces, il reprendra des céréales le lendemain matin (il changera de petit-déjeuner sinon).

Pour tout entier naturel n, on notera C_n l'événement « André mange des céréales au $n^{\text{ème}}$ matin » et p_n la valeur de $P(C_n)$. On suppose que $p_0 = P(C_0) = 0$.

(1) Déterminer $p_1, P_{\overline{C_1}}(C_2)$ puis p_2.

(2) De manière générale, donner, pour tout n de $\mathbb{N}$, les valeurs de $P_{C_n}(C_{n+1})$ et $P_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$ (en fonction de n).

(3) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P(\overline{C_n})$ en fonction de p_n.

(4) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?

(5) Déterminer une expression explicite de la suite (p_n).

Exercice 11

Deux joueurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ s'affrontent à un jeu à plusieurs reprises.

Le joueur $\mathcal{A}$ remporte la première partie.

La probabilité que $\mathcal{A}$ remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $\frac{1}{2}$.

La probabilité que $\mathcal{B}$ remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $\frac{3}{5}$.

Pour tout entier naturel n, on note p_n la probabilité que $\mathcal{A}$ remporte la $n^{\text{ème}}$ partie.

Démontrer que (p_n) est arithmético-géométrique et déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 12

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du *Petit Prince* de Saint-Exupéry, change l'état du réverbère de sa planète (allumé ou éteint) avec une probabilité de 0,75.

Au jour 0, le réverbère est éteint.

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement « le réverbère est allumé au jour n »,

$p_n = P(A_n), q_n = P(\overline{A_n})$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des probabilités.

(1)

(a) Calculer la probabilité que le réverbère soit allumé au jour 1, puis au jour 2.

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}q_n \\ q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n \end{cases}$$

(c) En déduire une matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

(2)

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

(c) En déduire les expressions de p_n et q_n en fonction de n.