Analyse – TD n°13 : applications, fonctions et bijectivité

A/ Applications

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, justifier que chaque application est bien définie et déterminer si elle est bijective. Donner sa bijection réciproque le cas échéant.

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$	(2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $k \mapsto k-3$	(3) $h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$	(4) $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x;y) \mapsto x+y$

Exercice 2

(1) On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $u(x) = \frac{x}{1-x}$.
Dresser le tableau de signes de u.
(2) On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

(a) Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation (E_m): $f(x) = m$.
(b) En déduire que f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.
(c) Donner l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
(1) Démontrer que, pour tout réel x de I, $0 \leq f(x) \leq 1$.
(2) Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation (E_m): $f(x) = m$.
(3) En déduire que f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera.
(4) Donner l'expression de la bijection réciproque f^{-1} de f.

Exercice 4

(1) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. Démontrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $E \times E$.
(2) Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 5

Soient E et F deux ensembles non vides. On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ telles que :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = x \text{ et } \forall x \in F, (f \circ g)(x) = x$$

(1) Démontrer que f réalise une bijection de E sur F.
(2) Démontrer que g est la bijection réciproque de f.

B/ Avec des fonctions numériques

Exercice 6

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ admet au moins une racine réelle.

Exercice 7

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

Déterminer le nombre exact de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E): p(x) = 0$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - x + 1}$.

(1) On pose $p(x) = x^3 - x + 1$.

(a) Étudier les variations de la fonction p sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $(E): p(x) = 0$.

(c) En déduire le signe de la fonction p sur $\mathbb{R}$.

(d) En déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(2) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$ et donner l'intervalle image $J = f(\mathcal{D}_f)$.

(3) La fonction f réalise-t-elle une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur J ? Justifier.

Exercice 9

Dans chacun des deux cas suivants :

(a) Déterminer $I = \mathcal{D}_f$;

(b) Justifier que f réalise une bijection de I sur $f(I)$;

(c) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.

(1) $f: x \mapsto \sqrt{-3x + 5}$

(2) $f: x \mapsto \sqrt{2x - 3}$

Exercice 10 (d'après sujet de concours EC)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(1) Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

(2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

(3) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat géométriquement.

(4) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

(5) Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

(6) Pour tout réel y de l'intervalle $]0; 1]$, déterminer l'unique réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$ tel que $y = f(x)$. Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1} de la fonction f.

Exercice 11

(1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

(a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

(b) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

(2) On pose $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}, f'(x) = \frac{2x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

(c) En déduire le tableau des variations complet de f et vérifier que f réalise un minimum local valant $\frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.