Analyse – TD n°14 : fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 1

Simplifier les écritures des nombres suivants :

$A = \ln(3) + 2\ln(9)$; $B = \ln(7) + \ln(5) + \ln(\frac{1}{35})$; $C = \ln(9) + \ln(4) - \ln(36)$; $D = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + 3\ln(2)$; $E = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(-2\sqrt{2}+3\right)$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(E_1): $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$; (I_2): $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$; (I_3): $\ln\left(\frac{1}{x}\right) > \ln(x^2 - 2x)$; (I_4): $\ln(x^2 + 4x) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right)$; (E_5): $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$; (I_6): $\ln(3x^2 - x - 2) \geq \ln(6x+4)$; (E_7): $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$.

Exercice 3

Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \ln(2x)$.

Exercice 4

On donne une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + c\ln(x)$, où a, b et c sont trois réels fixés. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. Par ailleurs, on sait que :

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1; 1)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale d'équation $x = 2$;
- f possède un maximum global de $2\ln(2)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

(1) Déterminer les valeurs de a, b et c puis dresser le tableau complet des variations de f.

(2) La fonction f est-elle concave sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - \ln(x)) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

(1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, le nombre $f'(x)$.

Exercice 6

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $h(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

(1) Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

(2) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique (d) d'équation $y = x - \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7 (d'après ESCP 2013)
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-2x+3$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
(1)
(a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
(b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
(2) Déterminer le nombre $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif et en déduire le tableau des variations de f. On donnera, en particulier, les limites aux bornes ainsi que la valeur de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (on pourra utiliser le fait que $\ln(2)\approx 0{,}73$ à 10^{-2} près).
(3) Établir que f est concave sur $]0;+\infty[$.
(4)
(a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
(b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0;+\infty[$.
(5)
(a) Démontrer que l'équation (E): $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0;+\infty[$. On prendra $\alpha<\beta$.
(b) Justifier que $1<\beta<2$.
(6) Tracer $\mathcal{T}$ ainsi que l'allure de $\mathcal{C}$ (on pourra utiliser le fait que $\alpha\approx 0{,}06$ à 10^{-2} près).

Exercice 8
(1) Faire l'étude complète de la fonction $f: x\mapsto f(x)=\ln(x^2+x+1)$. (On pourra notamment résoudre l'équation $f(x)=0$.)
(2)) Faire l'étude complète de la fonction $g: x\mapsto g(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{5-x}\right)$. (On pourra notamment résoudre l'équation $g(x)=0$ et étudier la convexité de g.)

Exercice 9
Simplifier les écritures des nombres suivants :
$$A=\ln\sqrt{\mathrm{e}^5}\ ;\ B=(\mathrm{e}^{2x})^3(\mathrm{e}^{-x})^6\ ;\ C=\ln(\mathrm{e}^{-3})+\mathrm{e}^{\ln(5)}\ ;\ D=\frac{\mathrm{e}^{2+\ln(8)}}{\mathrm{e}^{3+\ln(4)}}\times \mathrm{e}\ ;\ E=3^{-\frac{1}{\ln(3)}}$$

Exercice 10
Résoudre les équations et inéquations suivantes :
(I_1): $\mathrm{e}^{2x^2-1}\geq 3$; (I_2): $\mathrm{e}^x-4\mathrm{e}^{-x}<0$; (I_3): $3\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-4>0$; (E_4): $\ln(\mathrm{e}^x+1)-\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)=1$; (E_5): $2\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}$.

Exercice 11
(1) Faire l'étude complète de la fonction $ch: x\mapsto\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (cette fonction est appelée fonction **cosinus hyperbolique**).
(2) Faire l'étude complète de la fonction $sh: x\mapsto\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (cette fonction est appelée fonction **sinus hyperbolique** ; l'étude de la fonction $2.sh$ faisait l'objet d'un problème dans le sujet ECRICOME 2011).

Exercice 12

On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{cx}$, où a, b et c sont trois réels fixés. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. Par ailleurs, on sait que :

- la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en le point d'abscisse -2 ;
- la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en le point d'ordonnée 2 ;
- la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale au point d'abscisse -1.

(1) Déterminer les valeurs de a, b et c puis déterminer les variations de f.

(2) Établir que f n'admet aucun minimum, ni local ni global, sur $\mathbb{R}$.

(3) Démontrer que la fonction f obtenue possède un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées exactes.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \ln(1+3\mathrm{e}^{-x})$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

(1) Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (on notera α cette limite). Qu'en déduit-on géométriquement ?

(3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

(4) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m;+\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

(1) Vérifier que f est dérivable (à droite) en 0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(2) Déterminer la droite tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

(3) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1-x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

(4) Déterminer les éventuelles droites asymptotes à $\mathcal{C}$.

(5) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

(6) Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$, son/ses asymptote(s) et la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 15

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln(x)-x)$; (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}{1+x^2}$; (4) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$; (5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln|x|}$; (6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+\frac{1}{x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x$; (8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)}{\mathrm{e}^x\ln(x^5)}$; (9) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$; (10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x^3}$; (11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{1-\mathrm{e}^x}$

Exercice 16

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto x^{\sqrt{2}}$$
$$g: x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$$
$$h: x \mapsto x^x$$
$$k: x \mapsto (\ln(x))^{0,1}$$
$$\ell: x \mapsto x^{\ln(x)}$$

Exercice 17

(1) Soit n un nombre entier naturel non nul.

(a) Justifier que la probabilité d'obtenir au moins un six en lançant n fois un dé non truqué est $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. (On introduira pour cela l'événement S_n : « on obtient un 6 au $n^{\text{ème}}$ lancer ».)

(b) Déterminer le nombre minimal de lancers pour que cette probabilité soit supérieure à $0{,}99$.

(Indication : $\frac{2\ln(2)+2\ln(5)}{\ln(2)+\ln(3)-\ln(5)} \approx 25{,}3$ à 0,1 près.)

(2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er terme $u_0 = \frac{1}{3}$.

(a) Déterminer le sens de variation et la limite de cette suite.

(b) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que :

$$\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![, u_n \geq 1000$$

(Indication : $\frac{3\ln(2)+3\ln(5)+\ln(3)}{\ln(2)} \approx 11{,}6$ à 0,1 près.)