Analyse – TD n°15 : suites numériques, convergence et théorème de la limite monotone

Exercice 1

Les suites définies ci-dessous sont-elles minorées, majorées, bornées ? Justifier.

(1) $u_n = \frac{1}{2} - (-1)^n$

(2) $v_n = 3 - \frac{1}{2^n}$

(3) $w_n = \frac{1}{3}n^2 - 6n + 1$

(4) $t_n = \left(-\frac{5}{6}\right)^{2n-1}$

(5) $z_n = 3^n - \frac{4}{5}$

Exercice 2

Étudier la monotonie éventuelle des suites définies ci-dessous :

(1) $u_n = n^3 - 12n - 1$

(2) $v_n = 2 - \frac{1}{3^n}$

(3) $w_n = -\frac{5^{3n+4}}{6^{2n-1}}$

(4) $t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+1}$

(5) $z_n = n + (-1)^n$

Exercice 3

Déterminer la limite éventuelle des suites définies ci-dessous :

(1) $u_n = \frac{3n^3+4n^2-1}{7n^3-2n^2+71n}$

(2) $v_n = \frac{2\sqrt{n}}{n-2}$

(3) $w_n = \frac{121\sqrt{17}}{3^{n+1}}$

(4) $t_n = \frac{-3n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

(5) $z_n = \frac{4^n-3^n}{5^n+2^n}$

(6) $s_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n-2}{u_n+2}$.

(1) Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout n de $[\![3;+\infty[\![$, $u_n > 1$.

(2) On pose alors la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(3) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et expliciter son terme général.

(4) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

(5) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$.

(1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(2) On pose alors la suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(3) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre v_{n+1} et v_n.

(4) En déduire une formule explicite pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, indiquer sa limite.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n+3}$.

(1) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

(2) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n+3}$.

(3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ.

(4) Déterminer le réel ℓ.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

On pose alors la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.

(1)

(a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

(b) En déduire que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ.

(2)

(a) Calculer u_1.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1{,}9$.

(c) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n$.

(1)

(a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

(b) Établir qu'à partir d'un certain rang n_0 que l'on précisera, l'inégalité $u_n \geq n$ est vérifiée.

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2n + 4$.

(a) Établir que v est géométrique, puis en donner sa forme explicite.

(b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression de u_n.

(c) Retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établie dans la question (1)(c).

(3) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(a) Écrire explicitement S_n en fonction de l'entier naturel n.

(b) Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et positive a partir d'un certain rang et en déterminer la limite.