

Probabilités – TD n°16 : variables aléatoires finies et lois usuelles

Exercice 1

Une urne contient une boule portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3. On prélève successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note alors X la somme des numéros obtenus.

- (1) Modéliser l'expérience.
- (2) Déterminer la loi de X .
- (3) Calculer l'espérance de X .

Exercice 2

On lance successivement 3 fois le même dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note à chaque fois le numéro obtenu. La variable aléatoire X est égale au nombre de numéros différents obtenus.

- (1) Modéliser l'expérience.
- (2) Déterminer la loi de X .
- (3) Calculer l'espérance de X .

Exercice 3

On dispose dans une urne de 4 boules : une est noire et les autres sont blanches. Les boules blanches sont numérotées de 1 à 3. On prélève de cette urne des boules sans remise jusqu'à obtention de la noire. On propose à un joueur de se voir rétribuer un gain G calculé comme le total (en euro) des numéros tirés lors de l'expérience.

- (1) Déterminer la loi de G et décrire sa fonction de répartition F_G .
- (2) Quelle valeur pourrait-on demander de payer au joueur pour jouer à ce jeu de sorte qu'il soit équitable ?

Exercice 4

On lance un dé usuel selon le protocole suivant :

- si le résultat est 2 ou plus, on le relance ;
- si le résultat est 1, on s'arrête ;
- on ne lance le dé pas plus de 4 fois.

On note T la variable aléatoire qui renvoie le nombre de fois où ce dé a été lancé selon ce protocole.

- (1) Déterminer la loi de T et décrire sa fonction de répartition F_T .
- (2) Quelles sont les valeurs de $E(T)$ et $V(T)$? (Indication : $\frac{2381 \times 216 - 671^2}{216^2} = \frac{64055}{46656}$.)

Exercice 5

On dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont marquées ainsi :

- une face est marquée d'un 0 ;
- une face est marquée d'un 3 ;
- deux faces sont marquées d'un 1 ;
- deux faces sont marquées d'un 2.

Un jeu consiste à lancer une première fois le dé :

- si on obtient 0, on s'arrête et on obtient un score nul ;

- sinon, on le relance une fois et on ajoute les deux résultats obtenus.

On note S le score total obtenu.

- (1) Décrire la loi de probabilité de S .
- (2) Déterminer l'espérance de S .
- (3) Calculer les valeurs de variance et d'écart-type de S .

Exercice 6

On se donne une urne contenant deux boules blanches et n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$). On procède à des tirages successifs sans remise des boules de cette urne. On note alors T la variable aléatoire égale au numéro du tirage de l'obtention de la première boule blanche.

- (1) Décrire la loi de T .
- (2) Exprimer sa fonction de répartition F_T .
- (3) Dédurre alors l'espérance de T (en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$) le plus simplement possible.

Exercice 7

Soit I un intervalle de nombres réels. On définit la fonction indicatrice de l'intervalle I comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{I}_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit alors la fonction F comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = \frac{1}{2} \times \mathbb{I}_{[-1,1[}(t) + \frac{3}{4} \times \mathbb{I}_{[1,2[}(t) + 1 \times \mathbb{I}_{[2;+\infty[}(t)$$

- (1) Vérifier que F est continue à droite en tout réel t .
- (2) Tracer la représentation graphique de la fonction F .
- (3) Démontrer que F est la fonction de répartition d'un variable aléatoire que l'on notera X . (On pourra définir une expérience aléatoire ainsi qu'une variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.)
- (4) Déterminer $E(X)$.

Exercice 8

On donne une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-2	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	0,12	0,32	0,07	?	0,21	0,15

- (1) Déterminer la valeur manquante du tableau.
- (2) Calculer $P([-2 \leq X < 3])$ puis $P_{X \in [-\infty; 1]}([-2 \leq X < 3])$
- (3) Déterminer les espérances des variables aléatoires X et Y , telle que $Y = 3X + 2$.
- (4) Calculer $V[X]$ et $V[Y]$.

Exercice 9 (D'après HEC 2008 série T)

On se donne, pour tout l'exercice, une urne contenant 10 boules blanches et 2 noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.

On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées.

- (1) (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
- (b) Calculer la valeur de $P([X = 1])$.
- (c) Montrer que $P([X = 2]) = \frac{5}{33}$.
- (d) Calculer $P([X = 3])$.
- (2) Montrer que $E(X) = \frac{13}{11}$.
- (3) Calculer la valeur de $E(X^2)$, après avoir précisé les valeurs possibles pour la variable aléatoire X^2 .
- (4) Déterminer les valeurs de variance et d'écart-type de X .

Exercice 9

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants :

- (1) X est la variable aléatoire certaine égale à a , où a est un réel fixé ;
- (2) $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, où $n \in \mathbb{N}^*$;
- (3) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où $p \in [0; 1]$;

Exercice 10

On se donne une urne contenant 2 boules blanches et 10 boules noires. On procède à n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$) successifs avec remise d'une boule de cette urne. On note alors T la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

- (1) En justifiant soigneusement, donner la loi de T . Rappeler les valeurs d'espérance et de variance de T .
- (2) On considère un jeu dans lequel on perd 2 euros par boule noire obtenue et on gagne x euros (où x est un réel strictement positif) par boule blanche obtenue, au cours de ces n tirages. Quelle valeur attribuer à x pour que ce jeu devienne équitable ?

Exercice 11

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher (où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2), l'une étant rouge et les autres étant noires. On extrait de l'urne toutes les boules une à une sans remise. On définit R la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués lors de la prise de la boule rouge.

Déterminer la loi de R (on reconnaîtra une loi usuelle). Donner ainsi ses valeurs d'espérance et de variance (en fonction de n).

Exercice 12

Dans une population de 300 personnes prises au hasard, quelle est la probabilité d'avoir exactement trois personnes qui fêtent leur anniversaire le 23 mai ?

Exercice 13

Lors d'une réunion entre douze membres d'une équipe, règle est fixée qu'une mesure est adoptée lorsqu'au moins trois quart de l'assemblée vote pour cette mesure. Or, pour une mesure donnée, la probabilité que chaque membre, indépendamment des autres, vote pour cette mesure est de 0,8 . Quelle est la probabilité qu'à l'issue de la réunion cette mesure soit adoptée ?

Exercice 14

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1; 10 \rrbracket$.

- (1) Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit supérieure ou égale à 7.
- (2) Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit paire.
- (3) Déterminer la probabilité que les valeurs prises par X et Y soient égales.
- (4) Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit inférieure ou égale à celle prise par Y .
- (5) On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \max(X, Y)$.
 - (a) Déterminer, pour tout k de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, la probabilité de l'événement $[X \leq k]$.
 - (b) En déduire, pour tout k de $\llbracket 1; 10 \rrbracket$, la probabilité de l'événement $[Z \leq k]$.
 - (c) En déduire la loi de Z

Exercice 15

On lance deux dés à quatre faces numérotées de 1 à 4. On note X la variable aléatoire égale à la valeur obtenue avec le premier dé, Y la variable aléatoire égale à la valeur obtenue avec le second dé et S la somme des valeurs obtenues avec les deux dés.

- (1) Déterminer la loi de S .
- (2) En déduire l'espérance de S .
- (3) Quelles sont les lois suivies par X et Y ? Retrouver l'espérance de S .

Exercice 16

Soient X une variable aléatoire finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(a; b)$ un couple d'entiers relatifs avec $a < b$.

On dit que X suit la loi uniforme sur $\llbracket a; b \rrbracket$, ce que l'on peut noter $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$, lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket$;
- $\forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.

Par exemple, si on prélève au hasard une boule dans une urne opaque contenant 12 boules indiscernables au toucher et numérotées de -7 à 4 , la variable aléatoire égale au numéro obtenu suit alors la loi uniforme sur $\llbracket -7; 4 \rrbracket$.

On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = X - a + 1$.

- (1) Justifier que la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; b - a + 1 \rrbracket$.
- (2) En déduire $E(X)$.
- (3) Démontrer que $V(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}$.

Exercice 17

Soit n un entier strictement positif. On désire répartir n personnes dans trois hôtels H_1, H_2 et H_3 . Pour chaque personne, les trois hôtels sont équiprobables et la répartition est indépendante de l'ordre des personnes. Pour tout entier i de $\{1; 2; 3\}$, on note X_i le nombre de personnes dans l'hôtel H_i .

- (1) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 .
- (2)
 - (a) Que peut-on dire d'intéressant de la variable aléatoire $X_1 + X_2 + X_3$?
 - (b) En déduire l'ensemble des valeurs prises par $X_1 + X_2$, puis la loi de $X_1 + X_2$.
 - (c) Pourquoi le résultat précédent n'est-il pas surprenant ?

Exercice 18 (d'après ECRICOME – 2013 – Voie T)

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité. On admet que la livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélèvement de 10 de ces appareils à un tirage avec remise. On note d la probabilité qu'un appareil donné présente un défaut et on désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils sans défaut de ce prélèvement.

- (1) Déterminer la loi de X . Préciser ses paramètres.
- (2) Préciser $X(\Omega)$ et donner, pour tout k de $X(\Omega)$, l'expression de $P([X = k])$.
- (3) Rappeler les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.
- (4) Application numérique : dans cette question, $d = 5\%$.
 - (a) Calculer la probabilité que les appareils prélevés aient tous un défaut.
 - (b) Calculer la probabilité qu'au moins un des appareils prélevés présente un défaut.