

Concours Blanc n°1 Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Problème 1

Dans tout ce problème, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont le premier terme est un nombre réel u_0 fixé, et vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

Les parties A, B et C de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie A (le premier terme est égal à 3)

Dans cette partie, on suppose que $u_0 = 3$.

- (1) Calculer u_1 et u_2 . Que conjecture-t-on ?
- (2) Démontrer la conjecture précédente à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
- (3) On considère alors la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- (a) Calculer s_0, s_1 et s_2 .
- (b) Démontrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3.
- (c) Quel est le sens de variation de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Justifier.
- (d) Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre s_n en fonction de n .
- (e) En déduire s_{100} .
- (4) On considère ci-dessous un script Python, avec une instruction incomplète (celle faisant apparaître « ... »), dans lequel on déclare la fonction *suite_sn* :

```
def suite_sn(n):  
    s= ...  
    return s
```

Cette fonction est destinée à renvoyer la valeur de s_n pour un entier naturel n donné en paramètre d'entrée.

- (a) Recopier et compléter l'instruction incomplète (en respectant la syntaxe Python exacte).
- (b) Quelle commande (faisant référence au script précédent) doit-on taper dans la console pour obtenir à nouveau le résultat de la question (3)(e) ?

Partie B (le premier terme est égal à 1)

Dans cette partie, on suppose que $u_0 = 1$.

- (1) (a) Calculer u_1 et u_2 .
- (b) Que conjecture-t-on à propos du sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- (2) (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < u_{n+1}$$

- (b) Que penser de la conjecture émise dans la question (1)(b) ?

Partie C (le premier terme est égal à 10)

Dans cette partie, on suppose que $u_0 = 10$.

- (1) (a) Calculer u_1 et u_2 .
- (b) Que conjecture-t-on à propos du sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (2) (a) Résoudre l'équation (E): $x = \frac{1}{3}x + 2$ dans $\mathbb{R}$. On note δ sa solution.

On pose alors, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \delta$.

- (b) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
- (c) Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre v_n en fonction de n .
- (d) En déduire, pour tout entier naturel n , le nombre u_n en fonction de n .
- (3) Démontrer alors la conjecture émise dans la question (1)(b) précédente.
- (4) On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $S_n = 3(n+1) + 7 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k$.
- (b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $S_n = \frac{27}{2} + 3n - \frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n}$.
- (5) On considère ci-dessous un script Python, avec une instruction incomplète (celle faisant apparaître « ... »), dans lequel on déclare la fonction *suite_Sn* :

```
def suite_Sn(n):
    S= ...
    return S
```

Cette fonction est destinée à renvoyer la valeur de S_n pour un entier naturel n donné en paramètre d'entrée.

Recopier et compléter l'instruction incomplète (en respectant la syntaxe Python exacte).

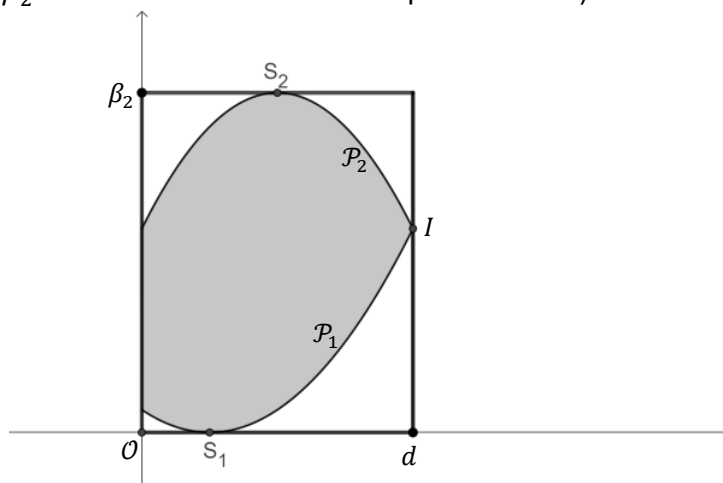
Problème 2

En plus des commandes de meubles qu'il a à traiter, un ébéniste décide de se lancer dans la fabrication et la vente d'un modèle de dessous de plat en bois.

Les parties A et B de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A (étude du design)

Comme illustré ci-dessous dans un repère orthogonal du plan d'origine O , un dessous de plat est de forme rectangulaire. Il est constitué d'une partie centrale, en bois foncé, incrustée dans un bois blanc (les nombres d et β_2 sont des réels strictement positifs fixés) :



La partie centrale est délimitée par deux sections de paraboles :

- la parabole $\mathcal{P}_1$, de sommet S_1 (d'ordonnée égale à 0), qui représente la fonction trinôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{15}(x-5)^2$;

- la parabole $\mathcal{P}_2$, de sommet S_2 (d'ordonnée égale à β_2), qui représente la fonction trinôme du second degré g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 15$.

Les deux sections de paraboles sont sécantes en le point I d'abscisse d .

Pour des raisons commerciales, la largeur d et la longueur β_2 du dessous de plat (données en centimètre) ne doivent pas mesurer plus de 26 centimètres.

(1) *Calcul de la longueur β_2 du dessous de plat*

(a) Déterminer les coordonnées du sommet S_2 de la parabole $\mathcal{P}_2$.

(b) La longueur du dessous de plat satisfait-elle aux exigences commerciales ?

(2) *Calcul de la largeur d du dessous de plat*

On considère l'équation (E): $f(x) = g(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

(a) Développer, réduire et ordonner l'expression $f(x)$.

(b) Démontrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{40}{3} = 0$$

(c) Vérifier que $x_1 = -4$ est solution de l'équation (E).

(d) En déduire la deuxième solution x_2 de cette équation.

(e) La largeur du dessous de plat satisfait-elle aux exigences commerciales ?

Partie B (étude de marché)

L'ébéniste décide de vendre chaque dessous de plat fabriqué au prix de 8 euros.

Il estime être capable d'en fabriquer entre 0 et 100 par mois (selon les commandes de meubles qu'il a déjà à honorer).

Le coût de fabrication en euro pour x dessous de plat est donné, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 100]$, par :

$$C(x) = \frac{1}{4}x^2 - 12x + 200$$

La recette en euro pour x dessous de plat vendus, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 100]$, est notée $R(x)$.

Le bénéfice en euro pour x dessous de plat fabriqués et vendus est donné, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 100]$, par :

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

(1) (a) Exprimer, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 100]$, le nombre $R(x)$ en fonction de x .

(b) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 100]$, $B(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 200$.

(c) Calculer $B(0)$ et $B(100)$.

(2) (a) Dresser le tableau des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0; 100]$, en justifiant.

(b) Pour combien de dessous de plat fabriqués et vendus le bénéfice réalisé par l'ébéniste est-il maximal ? À combien ce bénéfice maximal s'élève-t-il ?

(3) (a) Résoudre l'inéquation (I): $B(x) \geq 100$ dans l'intervalle $[0; 100]$.

(b) Qu'en déduit-on pour l'ébéniste ?

(4) Avec x un réel de l'intervalle $[0; 100]$, on dit que l'entreprise est rentable pour x dessous de plat fabriqués et vendus, lorsque $B(x) \geq 0$.

On considère ci-dessous un programme Python dans lequel 4 instructions sont incomplètes (les 4 instructions faisant apparaître « ... ») :

```

def B(x):
    y= ...
    return y
x=float(input("Entrer un nombre de l'intervalle [0;100]:"))
y= ...
if ...
    print("L'entreprise est rentable.")
else:
    print(" ...

```

Dans ce programme, avec un nombre flottant x donné en paramètre d'entrée, la fonction B est destinée à renvoyer la valeur de $B(x)$ (l'image de x par la fonction B).

Ce programme sert à tester si l'entreprise est rentable pour le nombre x (de dessous de plat) donné par son utilisateur.

Recopier et compléter les 4 instructions incomplètes (en respectant la syntaxe Python exacte).

Problème 3

Les parties A et B de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

La partie C utilise certains résultats de la partie A.

Partie A (étude d'une fonction homographique)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

- (1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- (2) (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées.
 (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.
- (3) (a) Démontrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) \neq -1$.
 (b) Réduire au même dénominateur, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, le nombre $f(x) + 1$.
 (c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]2; +\infty[$, $f(x) < -1$.
 (d) Comparer de même, sur l'intervalle $] -\infty; 2[$, les nombres $f(x)$ et -1 .
- (4) À l'aide d'un tableau de signes, déterminer, pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$, le signe du nombre $f(x)$.
- (5) (a) Soient a et b deux réels de $\mathcal{D}_f$. Démontrer que :

$$f(a) - f(b) = \frac{3(a-b)}{(2-a)(2-b)}$$

- (b) En déduire que f est strictement croissante sur les intervalles $] -\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$.
- (c) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[4; 10]$.

Partie B (une inéquation quotient)

On considère l'inéquation quotient (I): $\frac{x+1}{2-x} \leq \frac{99}{(x-1)(2-x)}$.

- (1) Déterminer l'ensemble de validité $\mathcal{V}$ de cette inéquation.
- (2) (a) Le nombre 0 est-il solution de l'inéquation (I) ? Justifier.
 (b) Même question avec le nombre 12.
 (c) Même question avec le nombre 2.
- (3) On pose, pour tout nombre réel x de $\mathcal{V}$:

$$f(x) = \frac{x+1}{2-x} \text{ et } g(x) = \frac{99}{(x-1)(2-x)}$$

On considère ci-dessous un programme Python dans lequel 4 instructions sont incomplètes (les 4 instructions faisant apparaître « ... ») :

```
def f(x):
    y= ...
    return y
def g(x):
    y= ...
    return y
x=float(input("Donner une valeur réelle:"))
if ...
    print("Cette valeur est interdite, donc pas solution de (I).")
else:
    a=f(x)
    b=g(x)
    if ...
        print("Cette valeur est solution de (I).")
    else:
        print("Cette valeur n'est pas solution de (I).")
```

Dans ce programme, avec un nombre flottant x donné en paramètre d'entrée, la fonction f est destinée à renvoyer la valeur de $f(x)$ (l'image de x par la fonction f) et la fonction g est destinée à renvoyer la valeur de $g(x)$ (l'image de x par la fonction g).

Ce programme sert à tester si un nombre donné par son utilisateur est solution ou non de l'inéquation (I) .

(a) Recopier et compléter les 4 instructions incomplètes (en respectant la syntaxe Python exacte).

(b) Qu'affiche ce programme lorsque l'utilisateur entre chacune des trois valeurs de la question précédente ?

(4) Démontrer que, pour tout réel x de $\mathcal{V}$, $(I) \Leftrightarrow \frac{(x-10)(x+10)}{(x-1)(2-x)} \leq 0$.

(5) À l'aide d'un tableau de signes, donner l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation (I) .

Partie C (une équation quotient avec paramètre)

On considère l'équation quotient $(E_\lambda): \frac{x+1}{2-x} = \lambda$, où λ est un réel fixé. On note $\mathcal{S}_\lambda$ son ensemble solution.

(1) Déterminer l'ensemble de validité $\mathcal{V}_\lambda$ de cette équation.

(2) À l'aide de la partie A, donner l'ensemble solution $\mathcal{S}_{-1}$ de l'équation $(E_{-1}): \frac{x+1}{2-x} = -1$.

(3) On suppose dans cette question que $\lambda \neq -1$. Résoudre l'équation (E_λ) . (On montrera que cette équation admet une unique solution qui s'exprime en fonction de λ .)

(4) Le résultat précédent est-il cohérent avec le résultat de la question (2)(b) de la partie A ?