

Concours Blanc n°2 Mathématiques
--

Durée de l'épreuve : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

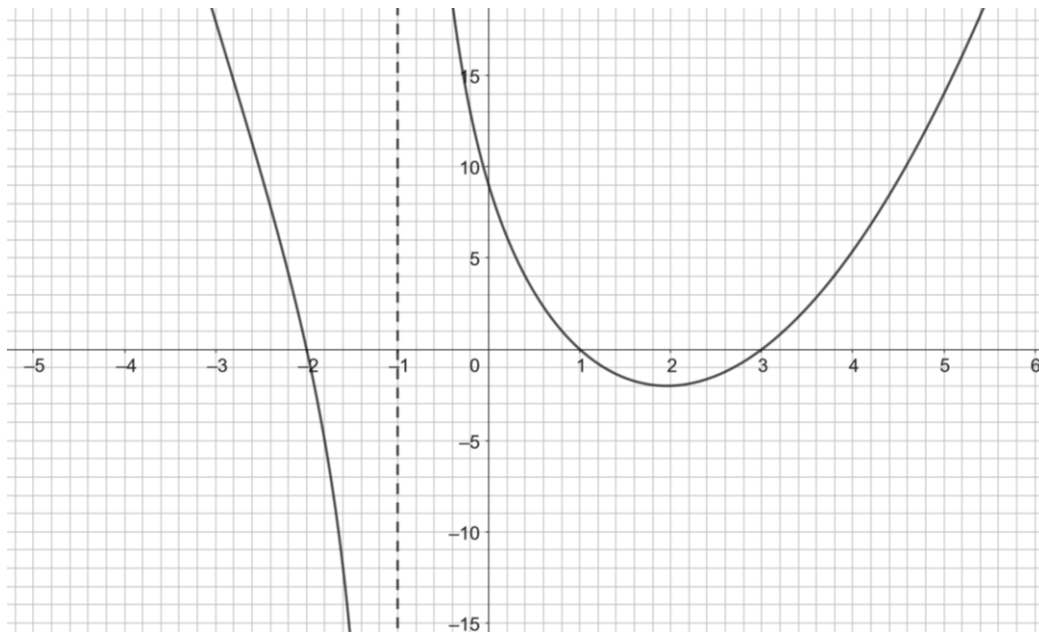
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 – Étude d’une fonction rationnelle

Dans cet exercice, les deux parties peuvent être traitées indépendamment l’une de l’autre. Néanmoins, la partie B est destinée à confirmer algébriquement certains résultats déterminés géométriquement dans la partie A.

Partie A

On considère ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d’une fonction f , qui admet une asymptote verticale d’équation $x = -1$, dans un repère orthogonal du plan :



Dans cette partie, sauf mention contraire, aucune justification n’est demandée.

- (1) Donner l’ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
- (2) Donner les images de $-3, 0, 2$ et 3 par f .
- (3)
 - (a) Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 0 par f .
 - (b) Le réel -10^{30} admet-il un ou des antécédents par f ? Si oui, combien ? Quel objet géométrique permet d’affirmer cela ?
- (4)
 - (a) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [-3; -2]$.
 - (b) Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0; 3]$.
- (5)
 - (a) La fonction f admet-elle un extremum global sur son ensemble de définition ? Préciser lequel et en quel réel il est atteint, le cas échéant.
 - (b) La fonction f admet-elle un extremum local sur son ensemble de définition ? Préciser lequel et en quel réel il est atteint, le cas échéant.
- (6) Résoudre graphiquement l’inéquation $(I): f(x) < -5$.
- (7) Dresser le tableau de signes de f sur son ensemble de définition.
- (8) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

Partie B

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x+1}$.

On considère également la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x+1}$.

On pose $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition commun des fonctions f et g .

(1) Déterminer $\mathcal{D}$ en justifiant.

(2) Calculer l'image de -3 par f (en détaillant).

(3) On pose $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

(a) Justifier que -2 est racine de la fonction polynomiale h .

(b) Effectuer la division euclidienne de $h(x)$ par $x + 2$.

(c) En déduire une factorisation (la plus complète possible) du nombre $h(x)$.

(d) Résoudre l'équation $(E): f(x) = 0$.

(e) Étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$ à l'aide d'un tableau de signes.

(4)

(a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$:

$$g(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$$

(b) En déduire que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 3 + \frac{12}{x+1}$$

(c) On pose, pour tout réel x , $k(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 3$. Déterminer le sens de variation de la fonction k sur $\mathbb{R}$.

(d) On pose $m(x) = \frac{12}{x+1}$.

Déterminer les fonctions u, v et w (avec u et w affines) telle que, pour tout réel x de $\mathcal{D}$:

$$m(x) = (u \circ v \circ w)(x)$$

(e) Déduire de la question précédente le sens de variation de la fonction m sur l'intervalle $] -\infty; -1[$.

(f) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty; -1[$.

(g) En déduire un encadrement de la fonction f sur l'intervalle $[-3; -2]$.

Exercice 2 – Avec des fonctions affines

Dans cet exercice, les trois parties sont indépendantes.

Partie A

Un spécialiste propose de louer différents matériels de chantier à des professionnels du bâtiment.

Pour un certain outil, ce spécialiste propose à ses clients trois types de contrat mensuel :

- avec le contrat 1, le client paie un abonnement mensuel de 15 euros auquel s'ajoute un prix de 5 euros par heure d'utilisation ;

- avec le contrat 2, le client ne paie pas d'abonnement mensuel, mais un prix de 10 euros par heure de d'utilisation ;

- avec le contrat 3, le client ne paie qu'un abonnement mensuel de 35 euros.

On note $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$, les prix à payer en euro pour x heures d'utilisation mensuelle de cet outil, avec les contrats 1, 2 et 3 respectivement.

- (1) Donner directement, sans aucune justification, l'expression des fonctions f_1 , f_2 et f_3 .
- (2) Représenter ces trois fonctions sur le graphique donné en annexe 1 (qui est à rendre avec la copie).
- (3) À l'aide du graphique, donner directement le contrat le plus avantageux en fonction de la durée d'utilisation de l'outil.

Partie B

On cherche les notes obtenues à un concours par un étudiant lors des épreuves écrite et orale en mathématiques. On désigne par x sa note d'écrit et par y sa note d'oral. On dispose des informations suivantes :

- les notes sont attribuées en points entiers ;
- sa note d'écrit est coefficient 2, tandis que sa note d'oral est coefficient 1 ;
- ses notes n'ont pas dépassé 18 (sur 20) ;
- sa note d'oral est strictement supérieure à sa note d'écrit ;
- le total de ses points, en tenant compte des coefficients, est supérieur ou égal à 30.

- (1) Donner le système d'inéquations traduisant les informations précédentes.
- (2) Déterminer graphiquement les couples $(x; y)$ de notes possibles obtenues par l'étudiant (on hachurera la partie du plan qui ne convient pas) après avoir tracé les droites adéquates sur l'annexe 2 (qui est à rendre avec la copie).
- (3) Il manque une dernière information pour pouvoir déterminer les notes obtenues par cet étudiant : s'il avait eu 6 points de moins à l'oral, sa note d'écrit aurait été le double de celle de son oral. Tracer la droite traduisant cette dernière information et conclure.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 1| - |x + 2| + |x|$.

- (1) Étudier, dans un même tableau, le signe des trois fonctions affines $x \mapsto x - 1$, $x \mapsto x + 2$ et $x \mapsto x$.
- (2) En déduire l'expression de f sur chacun des intervalles donnés par l'étude précédente.
- (3) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur le graphique donné en annexe 3 (qui est à rendre avec la copie).
- (4) En déduire les solutions de l'inéquation (I) : $|x - 1| - |x + 2| + |x| > 2$.

Exercice 3 – Résolutions de systèmes linéaires

Dans cet exercice, les trois parties sont indépendantes.

Partie A

On considère le système (S_1) : $\begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ -5x + 4y = -12 \end{cases}$.

- (1) Dans cette question, on propose de résoudre le système (S_1) géométriquement.
 - (a) Démontrer que $(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$, où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont quatre réels à déterminer.

- (b) Tracer les deux droites $(d_1): y = a_1x + b_1$ et $(d_2): y = a_2x + b_2$ sur le graphique donné en annexe 4 (qui est à rendre avec la copie).
- (c) En déduire l'ensemble solution S_1 du système (S_1) .
- (2) Dans cette question, on vérifie le résultat précédent algébriquement.
Résoudre algébriquement le système (S_1) .

Partie B

On considère le système $(S_2): \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + z = -8. \\ y + 2z = -3 \end{cases}$

- (1) Le triplet $(2; 3; -2)$ est-il solution du système (S_2) ? (On ne demande pas de résoudre le système (S_2) !)
- (2) Résoudre le système (S_2) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Partie C

On considère le système $(s_\lambda): \begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 3x - 2y = 1 - \lambda \end{cases}$, où λ est un réel fixé.

(1) Résoudre le système $(s_0): \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

(2) Résoudre le système $(s_1): \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$.

(3)

(a) Soit λ un réel fixé. Résoudre le système $(s_\lambda): \begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 3x - 2y = 1 - \lambda \end{cases}$.

(b) Le résultat précédent confirme-t-il ceux des questions (1) et (2) ?

Exercice 4 – Ensembles et dénombrement

Dans cet exercice, les quatre parties sont indépendantes.

Partie A

Un club de vacances propose aux 80 enfants présents 3 activités sportives : le football, le tennis, et le judo.

On sait que 20 enfants ont pratiqué le judo ; 23 enfants ont pratiqué le football ; 38 enfants ont pratiqué le tennis ; 8 enfants ont pratiqué seulement le judo et le tennis ; 2 enfants ont pratiqué seulement le judo et le football ; 21 enfants n'ont pratiqué que du tennis et 3 enfants ont pratiqué les 3 activités.

En raison d'une étude statistique, le gérant du club a besoin de connaître le nombre d'enfants n'ayant pratiqué aucune des 3 activités.

Répondre à cette question à l'aide d'un diagramme de Venn.

Partie B

Dans une chaîne de fabrication, deux défauts sont possibles sur les pièces usinées en sortie de chaîne : le défaut A et le défaut B. On note :

- $\mathcal{A}$ l'ensemble des pièces présentant le défaut A ;
- $\mathcal{B}$ l'ensemble des pièces présentant le défaut B ;
- $\mathcal{E}$ l'ensemble des pièces présentant au moins un des deux défauts ;
- $\mathcal{F}$ l'ensemble des pièces présentant le seul défaut A ;
- $\mathcal{G}$ l'ensemble des pièces présentant un et un seul défaut ;
- $\mathcal{H}$ l'ensemble des pièces ne présentant aucun des deux défauts.

(1) Exprimer directement, sans justification, les ensembles $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ en fonction des ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, à l'aide des opérations ensemblistes " $\cup$ ", " $\cap$ ", " $\overline{}$ " et " $\setminus$ ".

(2) Sur un échantillon de 100 pièces, 20 présentent le défaut A, 76 ne présentent pas le défaut B et 71 ne présentent aucun des deux défauts. Combien de pièces présentent les deux défauts à la fois ? (On justifiera la réponse à l'aide des formules faisant intervenir les cardinaux des ensembles.)

Partie C

Le chiffre 4 est un « mauvais » chiffre pour les chinois car sa prononciation est proche de celle du mot mort.

Le but de cette partie est de déterminer combien de codes, composés de 4 chiffres compris entre 0 et 9, une entreprise chinoise de digicodes doit supprimer, si elle veut implémenter uniquement des codes qui ne portent pas malheur.

On note $\mathcal{C} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, l'ensemble des dix chiffres.

(1) Soient $(x; y)$ un couple de nombres réels. Démontrer que :

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

(2) Déterminer le nombre N_1 de codes possibles avec un digicode classique.

(3) Déterminer le nombre N_2 de codes possibles ne contenant aucun chiffre 4.

(4) Conclure à l'aide de la question (1). (Indication : $19 \times 181 = 3439$.)

Partie D

Une version de QR-code se présente sous la forme d'un tableau à 25 lignes et 25 colonnes dont chaque case est blanche ou noire :



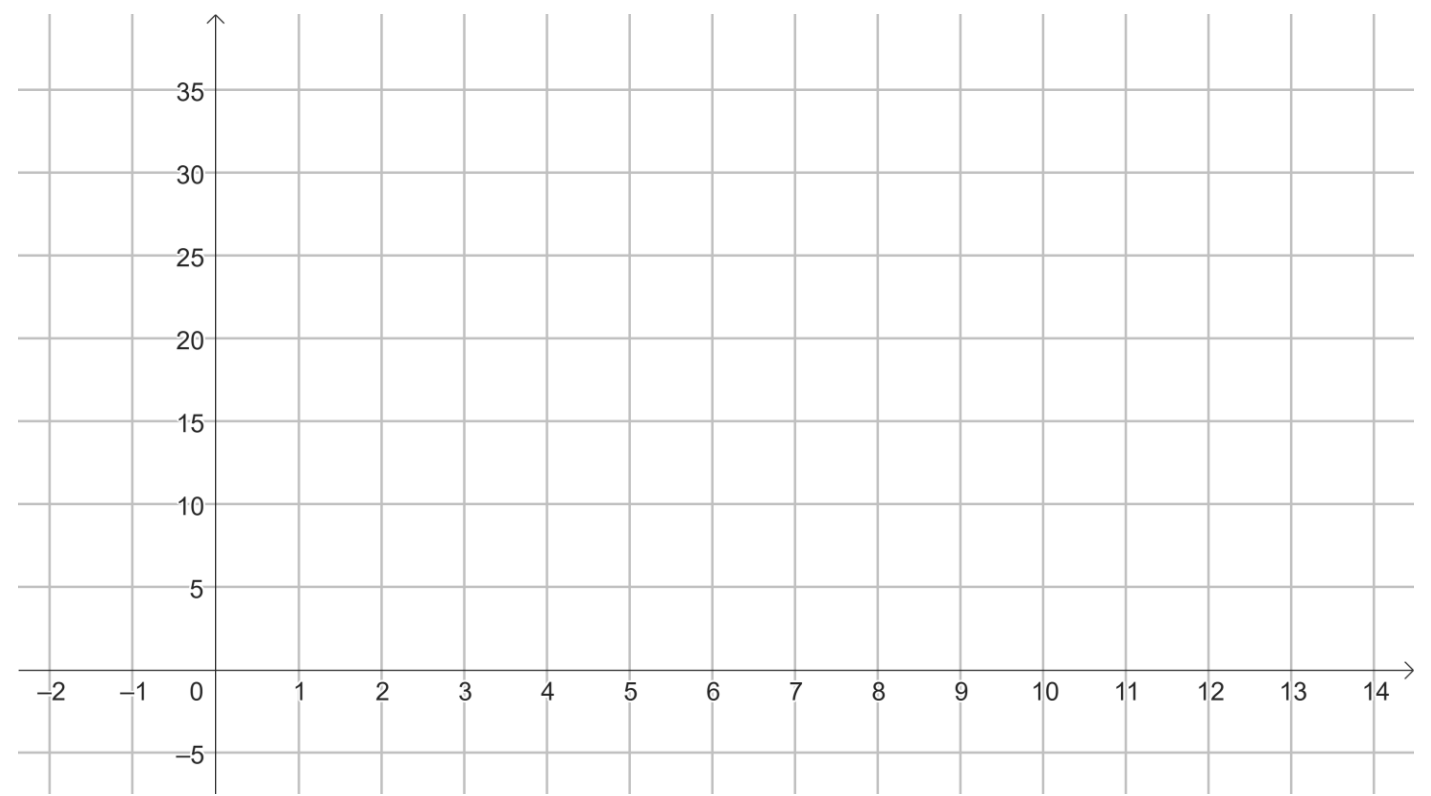
(1) Combien de QR-codes différents peut-on générer avec cette version ?

(2) Combien de QR-codes différents peut-on générer avec une version se présentant sous la forme d'un tableau à n lignes et n colonnes (où n est un entier naturel non nul) ?

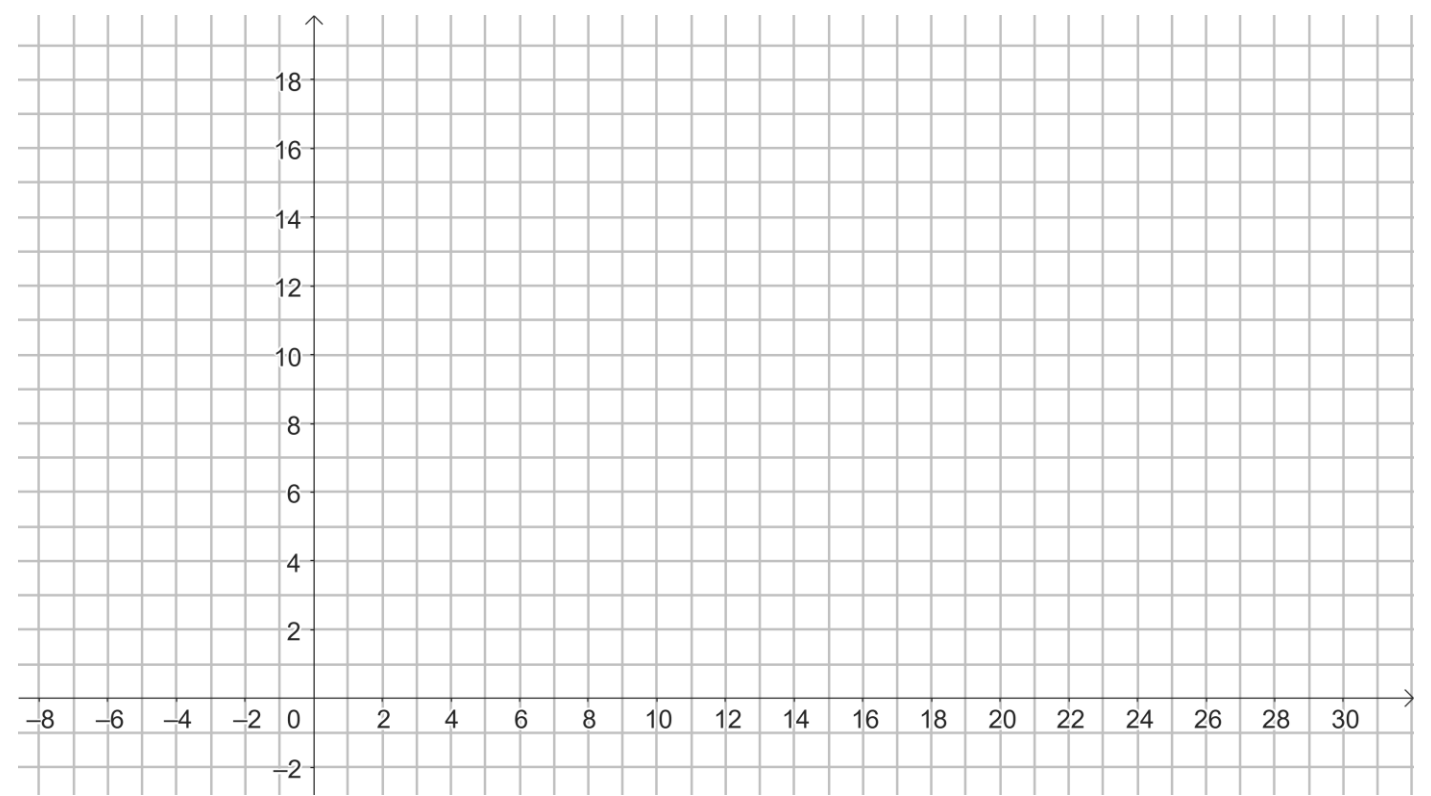
NOM :

Prénom :

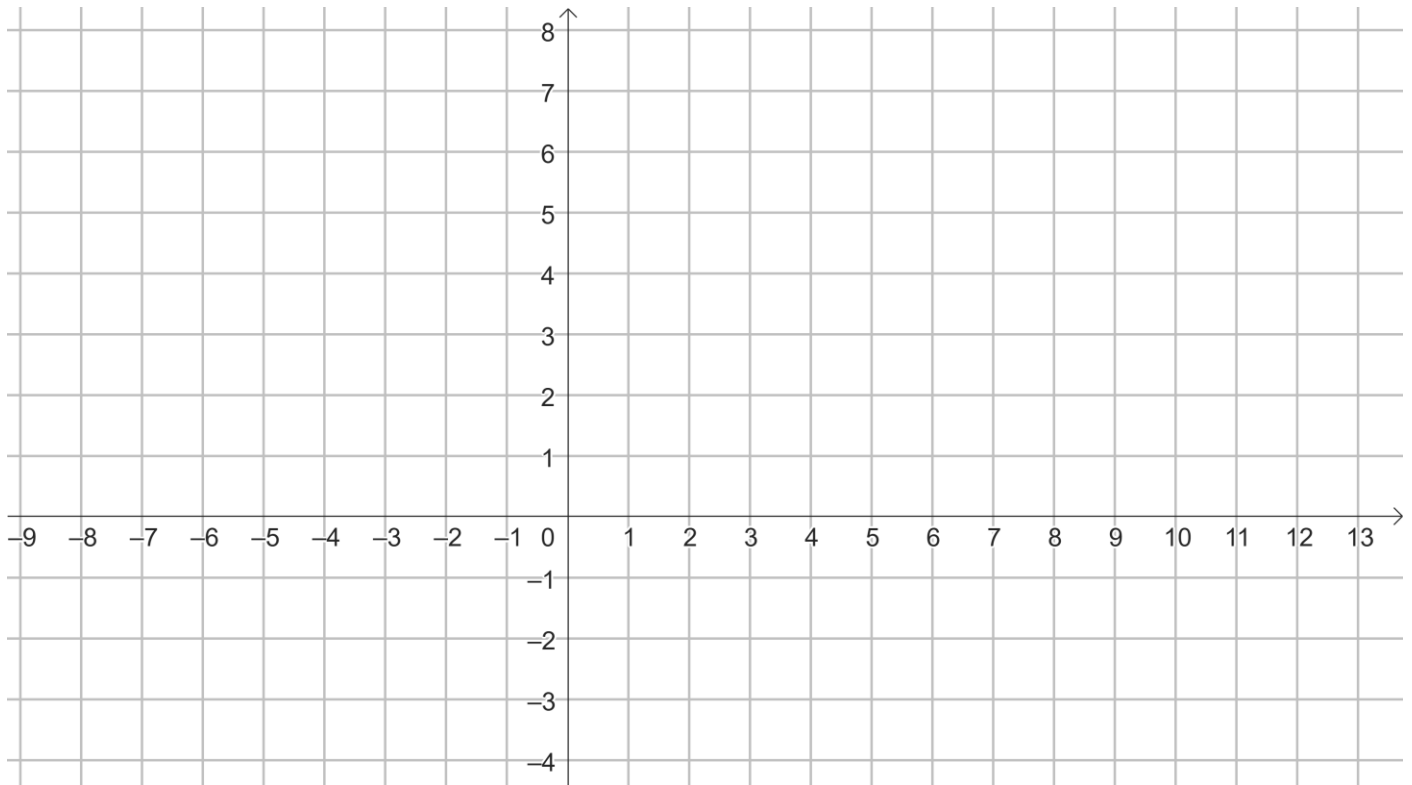
Annexe 1



Annexe 2



Annexe 3



Annexe 4

