Concours Blanc n°3
Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice 1 – Étude d'une fonction

Dans cet exercice, le résultat de la partie A est utilisé dans la partie B.

Partie A – un résultat préliminaire

On considère la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = -x^2 + 4x - 2$.
Déterminer le signe de la fonction t sur $\mathbb{R}$.

Partie B – étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On pose également, pour tout réel x, $u(x) = -x^2 + 2x - 2$ et $v(x) = x - 2$.

(1)

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

(b) On considère ci-dessous le script incomplet de la fonction Python « f », destinée à calculer et renvoyer l'image d'un nombre « x » si elle existe :

```
def f(x):
  if ...
    y="valeur interdite!"
  else:
    y= ...
  return y
```

Recopier et compléter les deux instructions incomplètes, en respectant la syntaxe Python exacte.

(c) On a tapé les instructions suivantes dans la console (la fonction « f » est celle décrite ci-dessus) :

```
>>> from math import sqrt
>>> round(2-sqrt(2),1)
0.6
>>> round(2+sqrt(2),1)
3.4
>>> round(f(2-sqrt(2)),1)
0.8
>>> round(f(2+sqrt(2)),1)
-4.8
```

On rappelle que, de manière générale, l'instruction « round(a,1) » renvoie une valeur approchée à 0,1 près du nombre « a ».
Interpréter les quatre résultats renvoyés par les quatre instructions commençant par « round ».

(d) Calculer la valeur exacte de $f\left(2+\sqrt{2}\right)$. (On donnera le résultat sans racine carrée au dénominateur.)

(2)

(a) Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

(b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Donner son équation cartésienne réduite le cas échéant.
(c) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote verticale ? Donner son équation cartésienne réduite le cas échéant.

(3)
(a) Effectuer la division euclidienne de $u(x)$ par $v(x)$.
(b) En déduire que la droite (d) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
(c) Étudier le signe du nombre $f(x) + x$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite (d).

(4)
(a) Sur quel intervalle les fonctions u et v sont-elles dérivables ? Justifier.
Déterminer, pour tout réel x de cet intervalle, les nombres $u'(x)$ et $v'(x)$.
(b) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et démontrer que, pour tout réel x de cet ensemble, $f'(x) = \frac{t(x)}{(x-2)^2}$.
(c) Étudier le signe du nombre $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. On dressera son tableau de variations complet. (On admet que $f\left(2 - \sqrt{2}\right) = -2 + 2\sqrt{2}$.)

(5) Sur l'annexe 1 (qui est à rendre avec la copie), tracer la droite (d), les éventuelles asymptotes verticales et horizontales à $\mathcal{C}_f$, les tangentes horizontales à $\mathcal{C}_f$, ainsi qu'une allure possible pour $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 – des tirages dans une boîte

Une boîte opaque contient 2 boules : une noire et une rouge.
On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans cette boîte.
On suppose que l'on est en situation d'équiprobabilité. On note alors P la probabilité uniforme.
Pour tout ensemble fini E, on note $card(E)$ son cardinal.

(1) Dans cette question, on tire 2 fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur.
On note Ω_2 l'univers de cette expérience aléatoire. On définit alors les événements A_2 et B_2 par :

A_2: « on obtient des boules des 2 couleurs au cours des 2 tirages »
B_2: « on obtient au plus une boule noire au cours des 2 tirages »

(a) Décrire l'univers Ω_2 sous forme ensembliste après avoir fait un arbre des cas possibles. En déduire $card(\Omega_2)$.
(b) Décrire les événements A_2 et B_2 sous forme ensembliste. En déduire $P(A_2)$ et $P(B_2)$.
(c) Décrire l'événement $A_2 \cap B_2$ sous forme ensembliste. En déduire $P(A_2 \cap B_2)$.
(d) Déduire des questions précédentes $P(A_2 \cup B_2)$.

(2) Dans cette question, on tire 3 fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur.
On note Ω_3 l'univers de cette expérience aléatoire. On définit alors les événements A_3 et B_3 par :

A_3: « on obtient des boules des 2 couleurs au cours des 2 tirages »
B_3: « on obtient au plus une boule noire au cours des 2 tirages »

(a) Décrire l'univers Ω_3 sous forme ensembliste après avoir fait un arbre des cas possibles. En déduire $card(\Omega_3)$.

(b) Décrire les événements A_3 et B_3 sous forme ensembliste. En déduire $P(A_3)$ et $P(B_3)$.
(c) Décrire l'événement $A_3 \cap B_3$ sous forme ensembliste. En déduire $P(A_3 \cap B_3)$.
(d) Déduire des questions précédentes $P(A_3 \cup B_3)$.

(3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Dans cette question, on tire n fois une boule dans cette boîte en la remettant après avoir noté sa couleur.
On note Ω_n l'univers de cette expérience aléatoire. On définit alors les événements A_n et B_n par :

A_n: « on obtient des boules des 2 couleurs au cours des n tirages »
B_n: « on obtient au plus une boule noire au cours des n tirages »

(a) On note U l'ensemble $\{N; R\}$ (N pour « noir », R pour « rouge »).
Exprimer l'ensemble Ω_n à l'aide de l'ensemble U. En déduire $card(\Omega_n)$.
(b) Décrire l'événement contraire $\overline{A_n}$ de A_n à l'aide d'une phrase, puis sous forme ensembliste. En déduire $P(\overline{A_n})$ puis $P(A_n)$.
Décrire l'événement B_n sous forme ensembliste. En déduire $P(B_n)$.
(c) Décrire l'événement $A_n \cap B_n$ sous forme ensembliste. En déduire $P(A_n \cap B_n)$.
(d) Déduire des questions précédentes $P(A_n \cup B_n)$.

Exercice 3 – Étude d'une suite définie par récurrence

Dans cet exercice, le résultat de la partie A est utilisé dans la partie B.

Partie A – un résultat préliminaire
Résoudre l'inéquation $(I_1): x^2 - 5x + 4 < 0$ dans $\mathbb{R}$.

Partie B – étude d'une suite définie par récurrence
On définit la suite (u_n) par $u_0 = \frac{13}{5}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}$$

On considère également la fonction $f: x \mapsto \sqrt{5x - 4}$.

(1)
(a) Donner les valeurs exactes de u_1 et u_2.
(b) Justifier que $u_0 < u_1 < u_2$.
(c) On considère ci-dessous le script incomplet de la fonction Python « suite_u », destinée à calculer et renvoyer le terme d'indice « n » de la suite (u_n) :

```
from math import sqrt

def suite_u(n):
  u=13/5
  for i in range ...
    u= ...
  return u
```

Recopier et compléter les deux instructions incomplètes, en respectant la syntaxe Python exacte.

(2) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.

(3)

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

(b) Déterminer les variations de la fonction f sur son ensemble de définition, après avoir déterminé sa fonction dérivée.

(c) En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 0. (On raisonnera par récurrence.)

(4)

(a) Résoudre l'équation (I_2): $f(x) - x > 0$ dans $\mathbb{R}^+$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est bornée.

(5) On admet que les termes de la suite (u_n) sont aussi proches que l'on veut de la valeur 4 dès que n est suffisamment grand (ce que l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$). Puisque cette suite est (strictement) croissante, on se demande quel est le premier entier naturel n tel que $u_n \geq 3{,}999$.

On considère ci-dessous le script incomplet de la fonction Python « seuil_u » destinée à renvoyer cet entier n :

```
from math import sqrt

def seuil_u():
  n=0
  u=13/5
  while ...
    n= ...
    u= ...
  return n
```

Recopier et compléter les trois instructions incomplètes.

Exercice 4 – classe d'une fonction définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{18}{x-4} \text{ si } x \in]-\infty; 1] \\ 4\sqrt{x} + 2 \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On pose également $u(x) = -\frac{18}{x-4}$ et $v(x) = 4\sqrt{x} + 2$.

(1)

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_u$ de la fonction u.

(b) Sur quel ensemble la fonction u est-elle continue et dérivable ? Justifier.
Déterminer alors, pour tout nombre réel x de cet ensemble, le nombre $u'(x)$.

(2)

(a) Sur quel ensemble $\mathcal{D}_v$ la fonction v est-elle définie et continue ? Justifier.

(b) Sur quel ensemble la fonction v est-elle dérivable ? Justifier.
Déterminer alors, pour tout nombre réel x de cet ensemble, le nombre $v'(x)$.

(3)

(a) Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1.

(c) En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(d) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(4) On dit qu'une fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, lorsque cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(5) Écrire un script Python contenant une fonction Python, d'entête « def f(x) : », qui calcule et renvoie l'image d'un nombre « x » par la fonction f. On respectera la syntaxe Python exacte.

Annexe 1

NOM :	Prénom :