

Concours Blanc n°4 Mathématiques
--

Durée de l'épreuve : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice 1 – probabilités et suite numérique

Dans un pays, par suite d'une forte augmentation du prix des carburants de 2023 à 2024, certains salariés d'une grande entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail :

- En 2023, 60% des salariés utilisaient leur voiture personnelle ;
- 30% des salariés utilisant leur voiture personnelle en 2023 ne l'utilisent plus en 2024 ;
- 10% des personnes n'utilisant pas leur voiture personnelle en 2023 l'utilisent en 2024.

Partie A – évolution entre les années 2023 et 2024

On choisit au hasard un salarié de l'entreprise.

On considère alors les événements A_0 : « la personne choisie utilise sa voiture personnelle au cours de l'année 2023 » et A_1 : « la personne choisie utilise sa voiture personnelle au cours de l'année 2024 ».

On note $\overline{A_0}$ et $\overline{A_1}$ les événements contraires des événements A_0 et A_1 respectivement, ainsi que p_0 et p_1 les probabilités des événements A_0 et A_1 respectivement. Ainsi $p_0 = P(A_0)$ et $p_1 = P(A_1)$, où P désigne la probabilité uniforme.

(1) Donner p_0 , $P_{A_0}(\overline{A_1})$ et $P_{\overline{A_0}}(A_1)$.

(2) Faire un arbre pondéré illustrant la situation (aucune justification n'est demandée).

(3) Déterminer la probabilité qu'un salarié utilise sa voiture personnelle en 2023 et en 2024.

(4) Démontrer que $p_1 = 0,46$.

(5) Un salarié n'utilise pas sa voiture personnelle en 2024. Calculer la probabilité pour qu'il l'ait utilisée en 2023 (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

Partie B – évolution entre deux années quelconques

On suppose que l'évolution constatée entre les années 2023 et 2024 se poursuit d'une année à l'autre, c'est-à-dire :

- 30% des salariés utilisant leur voiture personnelle une certaine année ne l'utilisent plus l'année suivante ;
- 10% des personnes n'utilisant pas leur voiture personnelle une certaine année l'utilisent l'année suivante.

On choisit au hasard un salarié de l'entreprise.

Pour tout entier naturel n , on note alors A_n l'événement « la personne choisie utilise sa voiture personnelle au cours de l'année 2023 + n » et $p_n = P(A_n)$.

(1) Soit n un entier naturel. Donner $P(\overline{A_n})$ en fonction de p_n , $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ et $P_{A_n}(\overline{A_{n+1}})$.

(2) Faire un arbre pondéré illustrant la situation (aucune justification n'est demandée).

(3) Soit n un entier naturel. Démontrer que $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{10}$.

(4) On considère ci-dessous un script Python incomplet. La fonction *proba* est destinée à renvoyer le terme d'indice n de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

```
def proba(n):  
    p=3/5  
    for i in range(1, ...):  
        p= ...  
    return p
```

Recopier et compléter les deux instructions incomplètes.

Partie C – évolution à long terme

(1)

(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{10}$.

(b) En déduire une formule explicite pour la suite arithmético-géométrique $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2) On donne ci-dessous un extrait d'une console Python :

```
>>> for i in range(5):  
    (3/5)**(10*i)  
  
1.0  
0.006046617599999997  
3.6561584400629733e-05  
2.2107391972073312e-07  
1.3367494538843715e-09
```

(a) Quelle conjecture peut-on en déduire concernant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$?

(b) Qu'en déduit-on concernant $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$?

(c) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 – probabilités et calcul matriciel

Claude commence un jeu avec sa console. De manière générale, on observe que :

- il gagne la partie d'essai, appelée partie 0, une fois sur deux ;

- lorsqu'il gagne une partie, il gagne la suivante avec une probabilité de $\frac{2}{5}$;

- lorsqu'il perd une partie, il perd la suivante avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel n , on note G_n l'événement « Claude gagne la partie n », $p_n = P(G_n)$ (où P désigne la probabilité uniforme), $q_n = P(\overline{G_n})$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ (la matrice colonne des probabilités).

(1) Donner U_0 , $P_{G_n}(G_{n+1})$ et $P_{\overline{G_n}}(\overline{G_{n+1}})$ (où n est un entier naturel).

(2) Faire un arbre pondéré illustrant la situation.

(3)

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}q_n \\ q_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{4}{5}q_n \end{cases}$$

(b) En déduire la matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$.

(4) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = A^n \times U_0$.

(5) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer les produits PQ et QP .

(b) Calculer le produit PD , puis le produit PDQ . Que remarque-t-on ?

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nQ$.

(d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

- (6)
- (a) En déduire, pour tout entier naturel n , les expressions de p_n et q_n en fonction de n .
- (b) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Que peut-on prévoir pour Claude ?

Exercice 3 – une étude de fonction

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7x^3 - 3x - 1$.

- (1)
- (a) Calculer $g\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.
- (b) Démontrer que $g\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}} - 1$.
- (c) Justifier que le nombre $g\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$ est strictement négatif.
- (2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (3)
- (a) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer, pour tout réel x , le nombre $g'(x)$ et factoriser le nombre $g'(x)$.
- (b) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (On dressera un tableau.)
- (4)
- (a) Démontrer que l'équation (E): $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .
- (b) Justifier que $\frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$. Calculer $g(1)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
- (c) Démontrer que $\alpha^3 = \frac{3\alpha+1}{7}$.
- (5) Déduire des questions (3)(b) et (4)(a) le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - x - 1)$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan d'origine $\mathcal{O}$.

- (1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2)
- (a) En utilisant le résultat de la question (4)(c) de la partie A, démontrer que $f(\alpha) = -\sqrt{\alpha} \frac{4\alpha+6}{7}$.
- (b) En utilisant le résultat de la question (4)(b) de la partie A, déterminer un encadrement de $\sqrt{\alpha}$ et de $\frac{4\alpha+6}{7}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- (3)
- (a) Justifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et démontrer que, pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
- (b) En déduire, à l'aide de la question (5) de la partie A, les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. (On dressera un tableau complet.)

(4)

(a) Démontrer que, pour tout réel h strictement positif, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h} \times h^2 - \sqrt{h} - \frac{1}{\sqrt{h}}$.

(b) En déduire $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

(c) Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

(5) On admet que $\alpha \approx 0,8$ et $f(\alpha) \approx -1,2$. Tracer sur l'annexe (qui est à rendre avec la copie) une allure possible pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 – un jeu de dés

On dispose de deux dés à six faces parfaitement équilibrés classiques, numérotés de 1 à 6.

On considère le jeu qui consiste à lancer ces deux dés simultanément (on parle d'un double jet), pas plus de trois fois, jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou de 7 apparaisse :

- dès que qu'une somme de 5 ou de 7 apparaît (au premier, deuxième ou troisième double jet), le jeu s'arrête et la partie est gagnée ;

- si ni la somme de 5 ni la somme de 7 n'est apparue au bout des trois doubles jets, la partie est perdue.

Le but de cet exercice est de déterminer la probabilité de gagner avec deux méthodes différentes.

On considère pour cela les événements suivants :

G : « la partie est gagnée » ;

C : « le double jet donne une somme de 5 » ;

S : « le double jet donne une somme de 7 » ;

A : « le double jet ne donne ni une somme de 5 ni une somme de 7 ».

Et pour n un entier naturel de l'ensemble $\llbracket 1; 3 \rrbracket$, les événements suivants :

A_n : « ni la somme de 5 ni la somme de 7 n'apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet » ;

C_n : « la somme de 5 apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet » ;

S_n : « la somme de 7 apparaît au $n^{\text{ème}}$ double jet » ;

(1) On considère l'univers $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où P est la probabilité uniforme.

(a) Démontrer que $P(C) = \frac{1}{9}$.

(b) Démontrer que $P(S) = \frac{1}{6}$.

(c) En déduire $P(A)$.

(2) Démontrer que $1 + \frac{13}{18} + \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{18}{5} \left(1 - \left(\frac{13}{18}\right)^3\right)$.

(3) **Une première méthode**

(a) On note G_5 l'événement « la partie est gagnée en s'arrêtant sur une somme de 5 ».

Exprimer l'événement G_5 en fonction des événements A_1, A_2, C_1, C_2 et C_3 .

En déduire, à l'aide de la question (2), que $P(G_5) = \frac{2}{5} \left(1 - \left(\frac{13}{18}\right)^3\right)$.

(b) On note G_7 l'événement « la partie est gagnée en s'arrêtant sur une somme de 7 ».

Exprimer l'événement G_7 en fonction des événements A_1, A_2, S_1, S_2 et S_3 .

En déduire, à l'aide de la question (2), que $P(G_7) = \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{13}{18} \right)^3 \right)$.

(c) En déduire $P(G)$.

(4) Une deuxième méthode

(a) Exprimer l'événement $\bar{G}$ en fonction des événements A_1, A_2 et A_3 .

(b) En déduire $P(G)$. Le résultat est-il cohérent avec le résultat de la question (3)(c) ?

Annexe (à rendre avec la copie)

NOM : _____ Prénom : _____

