Corrigé du Concours Blanc n°1

Problème 1

Partie A

(1) On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1 + 2 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 1 + 2 = 3$$

On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble constante égale à 3 à partir du rang 0.

(2) Notons, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n : « $u_n = 3$ ».

Initialisation

Par définition $u_0 = 3$, donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ (quelconque et fixé). Supposons que P_n est vraie. Démontrons que P_{n+1} est vraie.

On a :

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ (par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

$= \frac{1}{3} \times 3 + 2$ (car $u_n = 3$ puisque P_n est supposée vraie)

$= 1 + 2$

$= 3$

Ainsi $u_{n+1} = 3$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$$

(3)(a) On a :

$s_0 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 3$;

$s_1 = \sum_{k=0}^{1} u_k = u_0 + u_1 = 3 + 3 = 2 \times 3 = 6$;

et $s_2 = \sum_{k=0}^{2} u_k = u_0 + u_1 + u_2 = 3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 9$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} = 3 \text{ (qui est indépendant de } n\text{)}$$

C'est-à-dire :

$$s_{n+1} - s_n = 3$$

Ainsi, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $s_0 = 3$.

(c) Puisque $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = 3 > 0$, alors elle est strictement croissante à partir du rang 0.

(d) La formule explicite pour les suites arithmétiques donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = s_0 + nr = 3 + 3n$$

(e) On obtient alors $s_{100} = 3 + 3 \times 100 = 3 + 300 = 303$.

(4)(a) L'instruction complétée est :

```
s=3+3*n
```

(b) On tape dans la console la commande :

```
suite_sn(100)
```

Partie B

(1)(a) On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 1 + 2 = \frac{1}{3} + \frac{6}{3} = \frac{7}{3} \text{ et } u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{7}{3} + 2 = \frac{7}{9} + \frac{18}{9} = \frac{25}{9}$$

(b) On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble strictement croissante à partir du rang 0.

(En effet, $1 < \frac{7}{3} = \frac{21}{9} < \frac{25}{9}$.)

(c) On a :

$$u_1 - u_0 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{7}{3} - \frac{3}{3} = \frac{4}{3} \text{ et } u_2 - u_1 = \frac{25}{9} - \frac{7}{3} = \frac{25}{9} - \frac{21}{9} = \frac{4}{9}$$

Puisque $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

De plus :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{7}{3}}{1} = \frac{7}{3} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{25}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{25}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{25}{21}$$

Puisque $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

(2)(a) Notons, pour tout n de $\mathbb{N}$, Q_n : « $u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation

Par définition $u_0 = 1$, et d'après la question (1)(a) $u_1 = \frac{7}{3}$. Ainsi $u_0 < u_1$ et P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ (quelconque et fixé). Supposons que P_n est vraie. Démontrons que P_{n+1} est vraie.

On a alors $u_n < u_{n+1}$.

En multipliant par $\frac{1}{3} > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{3}u_n < \frac{1}{3}u_{n+1}$$

Et en ajoutant 2, il vient :

$$\frac{1}{3}u_n + 2 < \frac{1}{3}u_{n+1} + 2$$

C'est-à-dire, par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} < u_{n+2}$$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

(b) On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante à partir du rang 0, comme conjecturé dans la question (1)(b) précédente.

Partie C

(1)(a) On a :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{16}{3} \text{ et } u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{16}{3} + 2 = \frac{16}{9} + \frac{18}{9} = \frac{34}{9}$$

(b) On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble strictement décroissante à partir du rang 0.

(En effet, $10 = \frac{30}{3} > \frac{16}{3} = \frac{48}{9} > \frac{34}{9}$.)

(2)(a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{3}x - \frac{1}{3}x = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 2 \Leftrightarrow x = 2 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \text{ (par définition de } (u_n)) \\ 3 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 \text{ (d'après la question précédente)} \end{cases}$$

En retranchant membre à membre, on obtient :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - \frac{1}{3} \times 3 - 2$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$$

C'est-à-dire enfin, par définition de (v_n) :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$.

(c) La formule explicite pour les suites géométriques donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(d) On en déduit alors, par définition de la suite (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 3 = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 - \left(7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right) = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} - 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

C'est-à-dire :

$$u_{n+1} - u_n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or $\begin{cases} -\frac{14}{3} < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0 \end{cases}$, donc $-\frac{14}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0$, c'est-à-dire enfin $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement décroissante à partir du rang 0, comme conjecturé dans la question (1)(b) précédente.

(4)(a) D'après la question précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$= 3 + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3 + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3 + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 3 + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= 3 + 3 + 3 + \cdots + 3 + 7 \times (\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n)$ (puisque la somme est commutative et en factorisant par 7)

$= 3(n+1) + 7 \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ (puisque la somme compte $n+1$ termes)

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 3(n+1) + 7\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

(b) D'après la question précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 3(n+1) + 7\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$= 3n + 3 + 7 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$ (puisque $\frac{1}{3} \neq 1$)

$= 3n + 3 + 7 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$= 3n + 3 + \frac{21}{2} - \frac{3\times 7}{2} \times \frac{1^{n+1}}{3^{n+1}}$

$= 3n + \frac{27}{2} - \frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n}$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{27}{2} + 3n - \frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n}$$

(5) L'instruction complétée est :

```
S=27/2+3*n-(7/2)*(1/3**n)
```

Problème 2

Partie A

(1)(a) On a :

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \\ \beta_2 = g(\alpha_2) = g(10) = -\frac{1}{10}\times 10^2 + 2\times 10 + 15 = -10 + 20 + 15 = 25 \end{cases}$$

Ainsi le point S_2 a pour coordonnées $(10; 25)$.

(b) On en déduit que $\beta_2 = 25$, donc que la longueur du dessous de plat satisfait aux exigences commerciales (puisque $\beta_2 \leq 26$), étant donné qu'elle est de 25 cm.

(2)(a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{15}(x-5)^2 = \frac{1}{15}(x^2 - 10x + 25) = \frac{1}{15}x^2 - \frac{10}{15}x + \frac{25}{15} = \frac{1}{15}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

(b) On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (E) &\Leftrightarrow f(x) = g(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{15}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 15 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x - 2x + \frac{5}{3} - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{30} + \frac{3}{30}\right)x^2 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right)x + \frac{5}{3} - \frac{45}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{40}{3} = 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{40}{3} = 0$$

(c) On a :

$$\frac{1}{6}\times(-4)^2 - \frac{8}{3}\times(-4) - \frac{40}{3} = \frac{16}{6} + \frac{32}{3} - \frac{40}{3} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$$

Ainsi $x_1 = -4$ est solution de l'équation (E).

(d) La deuxième solution x_2 de (E) vérifie alors la relation $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. D'où :

$$-4x_2 = \frac{-\frac{40}{3}}{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow -4x_2 = -\frac{40}{3}\times 6 \Leftrightarrow -4x_2 = -80 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-80}{-4} = 20$$

Ainsi, la deuxième solution de (E) est $x_2 = 20$.

(e) Puisque $x_2 = d = 20$, la largeur du dessous de plat satisfait aux exigences commerciales (puisque $d \leq 26$).

Partie B

(1)(a) Puisque chaque dessous de plat est vendu 8 euros, la recette pour x dessous de plat vendus est donnée par :

$$\forall x \in [0; 100], R(x) = 8x$$

(b) On en déduit alors :

$$\forall x \in [0; 100], B(x) = R(x) - C(x) = 8x - \left(\frac{1}{4}x^2 - 12x + 200\right) = -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 200$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in [0; 100], B(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 200$$

(c) On en déduit alors :

$B(0) - \frac{1}{4}\times 0^2 + 20\times 0 - 200 = -200$

$B(100) = -\frac{1}{4}\times 100^2 + 20\times 100 - 200 = -\frac{10000}{4} + 2000 - 200 = -2500 + 2000 - 200 = -700$

(2)(a) On a :

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 20 \times 2 = 40 \\ B(\alpha) = B(40) = -\frac{1}{4} \times 40^2 + 20 \times 40 - 200 = -\frac{1600}{4} + 800 - 200 = -400 + 600 = 200 \end{cases}$$

De plus $a = -\frac{1}{4} < 0$, d'où le tableau suivant :

x	0		40		100
variations de B	-200	$\nearrow$	200	$\searrow$	-700

(b) D'après la question précédente, le bénéfice maximal est réalisé pour 40 dessous de plat fabriqués et vendus. Ce bénéfice maximal s'élève à 200 euros.

(3)(a) On a :

$$\forall x \in [0; 100], (I) \Leftrightarrow B(x) \geq 100 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 200 \geq 100 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 300 \geq 0$$

La fonction trinôme du second degré $h: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 20x - 300$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times (-300) = 400 - 300 = 100 = 10^2 > 0$$

Elle admet donc deux racines réelles distinctes :

$$x_3 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-10}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-30}{-\frac{1}{2}} = 30 \times 2 = 60 \text{ et } x_4 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20+10}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-10}{-\frac{1}{2}} = 10 \times 2 = 20$$

De plus $a = -\frac{1}{4} < 0$, d'où le tableau suivant :

x	0		20		60		100
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\mathcal{S} = [20; 60]$.

(b) On déduit de la question précédente que l'ébéniste réalise plus de 100 euros de bénéfices pour une quantité de dessous de plat fabriqués et vendus comprise entre 20 et 60 inclus.

(4) Les quatre instructions complétées sont (dans l'ordre) :

```
y=(-1/4)*x**2+20*x-200
y=B(x)
if y>=0 :
print("L'entreprise n'est pas rentable.")
```

Problème 3

Partie A

(1) Puisque $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, la fonction f a pour ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

(2)(a) On a $f(0) = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$, donc le point A a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

(b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Donc le point B a pour coordonnées $(-1; 0)$.

(3)(a) Raisonnons par l'absurde et supposons a contrario qu'il existe $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ tel que $f(x) = -1$. On a alors $\frac{x+1}{2-x} = -1$, c'est-à-dire $x + 1 = -(2 - x)$, c'est-à-dire $x + 1 = -2 + x$. D'où, en retranchant x, on obtient $1 = -2$, ce qui est absurde.

On en déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) \neq -1$$

(b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x)+1=\frac{x+1}{2-x}+1=\frac{x+1}{2-x}+\frac{2-x}{2-x}=\frac{x+1+2-x}{2-x}=\frac{3}{2-x}$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x)+1=\frac{3}{2-x}$$

(c) Soit $x \in]2;+\infty[$. Puisque $\begin{cases} 3>0 \\ 2-x<0 \end{cases}$, alors $\frac{3}{2-x}<0$, c'est-à-dire $f(x)+1<0$, c'est-à-dire enfin $f(x)<-1$.

Ainsi :

$$\forall x \in]2;+\infty[, f(x)<-1$$

(d) De même, avec $x \in]-\infty;2[$, puisque $\begin{cases} 3>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$, alors $\frac{3}{2-x}>0$, c'est-à-dire $f(x)+1>0$, c'est-à-dire enfin $f(x)>-1$.

Ainsi :

$$\forall x \in]2;+\infty[, f(x)>-1$$

(4) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

(5)(a) Soient a et b deux réels de $\mathcal{D}_f$. On a :

$$f(a)-f(b)=\frac{a+1}{2-a}-\frac{b+1}{2-b}=\frac{(a+1)(2-b)-(b+1)(2-a)}{(2-a)(2-b)}=\frac{2a-ab+2-b-(2b-ab+2-a)}{(2-a)(2-b)}=\frac{3a-3b}{(2-a)(2-b)}=\frac{3(a-b)}{(2-a)(2-b)}$$

C'est-à-dire :

$$f(a)-f(b)=\frac{3(a-b)}{(2-a)(2-b)}$$

(b) Soient a et b deux réels de $\mathcal{D}_f$ tels que $a<b<2$. On a alors :

$$\begin{cases} 3>0 \\ a-b<0 \text{ car } a<b \\ 2-a>0 \text{ car } a<2 \\ 2-b>0 \text{ car } b<2 \end{cases}$$

Ainsi $\frac{3(a-b)}{(2-a)(2-b)}<0$, c'est-à-dire, d'après la question précédente, $f(a)-f(b)<0$, c'est-à-dire enfin :

$$f(a)<f(b)$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

De même, avec a et b deux réels de $\mathcal{D}_f$ tels que $2<a<b$:

$$\begin{cases} 3>0 \\ a-b<0 \text{ car } a<b \\ 2-a<0 \text{ car } a>2 \\ 2-b<0 \text{ car } b>2 \end{cases}$$

Ainsi $\frac{3(a-b)}{(2-a)(2-b)}<0$, c'est-à-dire, encore une fois, $f(a)-f(b)<0$, c'est-à-dire enfin :

$$f(a)<f(b)$$

On en déduit que la fonction f est également strictement croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

(c) Soit x un réel de l'intervalle $[4;10]$.

Puisque $2<4\leq x\leq 10$, alors $f(4)\leq f(x)\leq f(10)$, étant donné que la fonction f est (strictement) croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$ d'après la question précédente.

Or $f(4)=\frac{4+1}{2-4}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$ et $f(10)=\frac{10+1}{2-10}=\frac{11}{-8}=-\frac{11}{8}$, donc finalement :

$$\forall x \in [4;10], -\frac{5}{2}\leq f(x)\leq -\frac{11}{8}$$

Partie B

(1) On a :

$$2 - x = 0 \Leftrightarrow 2 = x$$

$$(x-1)(2-x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2 = x$$

Ainsi l'inéquation (I) admet pour valeurs interdites les réels 1 et 2. Elle a donc pour ensemble de validité $\mathcal{V} = \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$.

(2)(a) On a d'une part $\frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$, et d'autre part $\frac{99}{(0-1)(2-0)} = -\frac{99}{2}$. Or $\frac{1}{2} > -\frac{99}{2}$, donc le nombre 0 n'est pas solution de l'inéquation (I).

(b) De même, on a d'une part $\frac{12+1}{2-12} = \frac{13}{-10} = -1{,}3$, et d'autre part $\frac{99}{(12-1)(2-12)} = \frac{9\times 11}{11\times(-10)} = -\frac{9}{10} = -0{,}9$. Or $-1{,}3 \leq -0{,}9$, donc le nombre 12 est solution de l'inéquation (I).

(c) Le nombre 2 ne peut pas être solution de l'inéquation (I) puisque c'est une valeur interdite pour cette inéquation !

(3)(a) Les quatre instructions complétées sont (dans l'ordre) :

```
y=(x+1)/(2-x)
y=99/((x-1)*(2-x))
if x==1 or x==2 :
if a<=b :
```

(b) Lorsque l'utilisateur entre la valeur 0, le programme affiche :

« Cette valeur n'est pas solution de (I). »

Lorsque l'utilisateur entre la valeur 12, le programme affiche :

« Cette valeur est solution de (I). »

Lorsque l'utilisateur entre la valeur 2, le programme affiche :

« Cette valeur est interdite, donc pas solution de (I). »

(4) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}, (I) \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} \leq \frac{99}{(x-1)(2-x)} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} - \frac{99}{(x-1)(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-99}{(x-1)(2-x)} \leq 0$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}, (I) \Leftrightarrow \frac{x^2-1-99}{(x-1)(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-100}{(x-1)(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-10^2}{(x-1)(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-10)(x+10)}{(x-1)(2-x)} \leq 0$$

C'est-à-dire enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}, (I) \Leftrightarrow \frac{(x-10)(x+10)}{(x-1)(2-x)} \leq 0$$

(5) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-10		1		2		10		$+\infty$
signe de $x-10$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $x+10$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
signe de $\frac{(x-10)(x+10)}{(x-1)(2-x)}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

On en déduit alors $\mathcal{S} =]-\infty;-10] \cup]1;2[\cup [10;+\infty[$.

Partie C

(1) Comme dans la question (1) de la partie A, on obtient $\mathcal{V}_\lambda = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

(2) Remarquons que, pour tout réel λ, l'équation (E_λ) équivaut à $f(x) = \lambda$, où f est la fonction de la partie A. Or, on a démontré dans la question (3)(a) de la partie A que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) \neq -1$$

Ainsi l'ensemble solution $\mathcal{S}_{-1}$ de l'équation $(E_{-1}): \frac{x+1}{2-x} = -1$ est vide ! $(\mathcal{S}_{-1} = \emptyset)$

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, (E_\lambda) \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} = \lambda \Leftrightarrow x + 1 = \lambda(2-x) \Leftrightarrow x + 1 = 2\lambda - \lambda x \Leftrightarrow x + \lambda x = 2\lambda - 1$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, (E_\lambda) \Leftrightarrow x(1+\lambda) = 2\lambda - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2\lambda-1}{1+\lambda} (1 + \lambda \neq 0 \text{ puisque } \lambda \neq -1)$$

Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\mathcal{S}_\lambda = \left\{\frac{2\lambda-1}{1+\lambda}\right\}$.

(4) Dans la question (2)(b) de la partie A, nous avons résolu l'équation $(E_0): f(x) = 0$ et nous avons trouvé $\mathcal{S}_0 = \{-1\}$, ce qui est bien cohérent avec le résultat précédent (en prenant $\lambda = 0$, puisque $\frac{2\times 0-1}{1+0} = -1$).