Corrigé du Concours Blanc n°2

Exercice 1 – Étude d'une fonction rationnelle

Partie A

(1) $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

(2) Les images de $-3, 0, 2$ et 3 par f sont respectivement égales à $18, 9, -2$ et 0.

(3)(a) Le nombre 0 admet exactement 3 antécédents par f égaux à $-2, 1$ et 3.

(b) L'asymptote verticale d'équation $x = -1$ indique que le réel -10^{30} admet exactement un antécédent par f (très proche de -1 et strictement inférieur à -1).

(4)(a) $\forall x \in [-3; -2]$, $0 \leq f(x) \leq 18$

(b) $\forall x \in [0; 3]$, $-2 \leq f(x) \leq 9$

(5)(a) Sur $\mathcal{D}_f$, la fonction f n'admet aucun extremum global.

(b) Sur $\mathcal{D}_f$, la fonction f admet le minimum local de -2 atteint en 2.

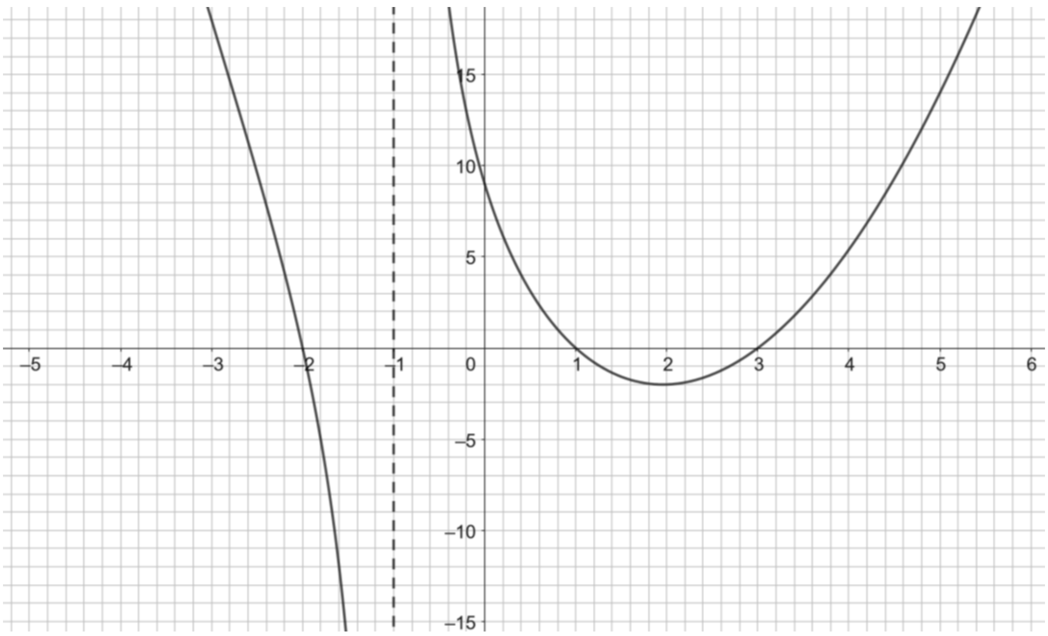
(6) $\mathcal{S} =]-1{,}8; -1[$

(7)

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(8)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	



Partie B

(1) On a :

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

(2) On a :

$$f(-3)=\frac{3}{2}\times\frac{(-3)^3-2\times(-3)^2-5\times(-3)+6}{-3+1}=\frac{3}{2}\times\frac{-27-2\times 9+15+6}{-2}=\frac{3}{2}\times\frac{-24}{-2}=\frac{3\times2\times6}{2\times2}=3\times6=18$$

C'est-à-dire $f(-3)=18$.

(3)(a) On a :

$$h(-2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-5\times(-2)+6=-8-2\times4+10+6=-16+16=0$$

Donc le nombre -2 est racine de la fonction polynomiale h.

(b) On a :

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \cline{2-2} -(x^3+2x^2) & x^2-4x+3 \\ -4x^2-5x+6 & \\ -(-4x^2-8x) & \\ 3x+6 & \\ -(3x+6) & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=(x+2)(x^2-4x+3)$$

(c) La fonction trinôme du second degré $t: x\mapsto x^2-4x+3$ admet $x_1=1$ pour racine évidente (en effet, $1^2-4\times1+3=1-4+3=1-3+3=0$). Sa deuxième racine x_2 vérifie donc la relation $x_1x_2=\frac{c}{a}$. D'où $1\times x_2=\frac{3}{1}$, c'est-à-dire $x_2=3$. Ainsi, il vient :

$$\forall x\in\mathbb{R}, t(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=1\times(x-1)(x-3)=(x-1)(x-3)$$

Finalement, on obtient d'après la question précédente :

$$\forall x\in\mathbb{R}, h(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$$

(d) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}, (E)\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}\times\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+1}=0\Leftrightarrow\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+1}=0 \text{ (puisque } \tfrac{3}{2}\neq0)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}, (E)\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Leftrightarrow h(x)=0$$

C'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}, (E)\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-3)=0\Leftrightarrow x+2=0 \text{ ou } x-1=0 \text{ ou } x-3=0$$

C'est-à-dire enfin :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}, (E)\Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=3$$

Ainsi $S=\{-2;1;3\}$.

(e) D'après la question (c) précédente, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}, f(x)=\frac{3}{2}\times\frac{h(x)}{x+1}=\frac{3}{2}\times\frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{x+1}$$

Puisque $\frac{3}{2}>0$, le nombre $f(x)$ est du même signe que le nombre $\frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{x+1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(4)(a) On a :

$$\forall x\in\mathcal{D}, g(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathcal{D}, g(x)=\frac{(ax^2+bx+c)(x+1)+d}{x+1}$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}, g(x) = \frac{ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c+d}{x+1}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D}, \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x+1} = \frac{ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c+d}{x+1}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D},\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c + d$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \\ b + c = -5 \\ c + d = 6 \end{cases}$ (puisque deux fonctions polynomiales sont égales si, et seulement si, elles ont le même degré et les mêmes coefficients)

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - a = -2 - 1 = -3 \\ c = -5 - b = -5 + 3 = -2 \\ d = 6 - c = 6 + 2 = 8 \end{cases}$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathcal{D}, g(x) = x^2 - 3x - 2 + \frac{8}{x+1}$$

(b) On déduit directement de la question précédente :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{3}{2} \times f(x) = \frac{3}{2} \times \left(x^2 - 3x - 2 + \frac{8}{x+1}\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \times 3x - \frac{3}{2} \times 2 + \frac{3\times 8}{2(x+1)}$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 3 + \frac{12}{x+1}$$

(c) Pour la fonction trinôme du second degré k, on a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{9}{2}}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2} \text{ et } \beta = k(\alpha) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \times \frac{3}{2} - 3 = \frac{27}{8} - \frac{27}{4} - 3 = \frac{27-54-24}{8} = -\frac{51}{8}$$

De plus $a = \frac{3}{2} > 0$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
variations de k	$\searrow$	$-\frac{51}{8}$	$\nearrow$

(d) On a le schéma de composition suivant :

$$x \overset{w}{\mapsto} x+1 \overset{v}{\mapsto} \frac{1}{x+1} \overset{u}{\mapsto} \frac{12}{x+1} = m(x)$$

Ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}, m(x) = (u \circ v \circ w)(x)$$

Avec :

$$\begin{cases} u : x \mapsto 12x \\ v : x \mapsto \frac{1}{x} \\ w : x \mapsto x + 1 \end{cases}$$

(e) La fonction affine w est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ (puisque son coefficient est $1 > 0$) et on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[, w(x) = x + 1 < 0$$

De plus, la fonction inverse v est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Enfin, la fonction affine u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque son coefficient est $12 > 0$).

Ainsi, d'après la question précédente, la fonction $m = u \circ v \circ w$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -1[$.

(f) D'après la précédente question (b) :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 3 + \frac{12}{x+1} = k(x) + m(x)$$

Or, d'après la précédente question (c), la fonction k est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ (car strictement décroissante sur $]-\infty;\frac{3}{2}]$) et, d'après la question précédente, la fonction m est également strictement décroissante sur ce même intervalle $]-\infty;-1[$.
Donc la fonction $f = k + m$ est strictement décroissante sur cet intervalle $]-\infty;-1[$.
(g) Puisque la fonction f est, d'après la question précédente, (strictement) décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, pour $-3 \leq x \leq -2$, il vient :

$$f(-3) \geq f(x) \geq f(-2)$$

C'est-à-dire, puisque $f(-3) = 18$ et $f(-2) = 0$ (d'après les questions (2) et (3)(d) de cette partie B) :

$$18 \geq f(x) \geq 0$$

Ainsi :

$$\forall x \in [-3;-2], 0 \leq f(x) \leq 18$$

Exercice 2 – Avec des fonctions affines

Partie A

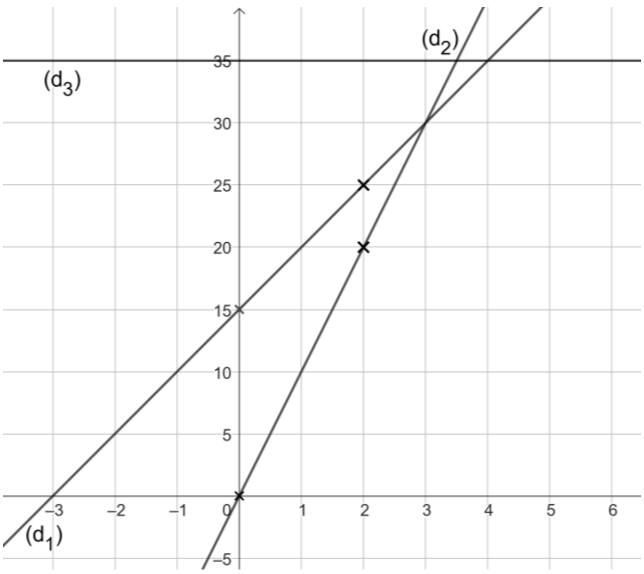
(1) D'après l'énoncé, pour tout réel x positif ou nul, on a :

$$f_1(x) = 5x + 15; f_2(x) = 10x \text{ et } f_3(x) = 35$$

(2) cf. graphique
On trace les droites $(d_1): y = 5x + 15$, $(d_2): y = 10x$ et $(d_3): y = 35$ (qui représentent les fonctions affines f_1, f_2 et f_3 respectivement).

x	0	2
$f_1(x)$	15	25

x	0	2
$f_2(x)$	0	20



(3) Pour x heures d'utilisation de l'outil (avec $x \in \mathbb{R}^+$) :
- si $0 \leq x < 3$, le contrat 2 est le plus avantageux ;
- pour $x = 3$, on paie la même somme (30 euros) avec les contrats 1 et 2 qui sont les plus avantageux ;
- pour $3 < x < 4$, le contrat 1 est le plus avantageux ;
- pour $x = 4$, on paie la même somme avec les contrats 1 et 3 (35 euros) qui sont les plus avantageux ;
- pour $x > 4$, le contrat 3 est le plus avantageux.

Partie B

(1) D'après l'énoncé, avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, on a le système (S) suivant :

$$(S): \begin{cases} 0 \leq x \leq 18 \\ 0 \leq y \leq 18 \\ x < y \\ 2x + y \geq 30 \end{cases}$$

(2) cf. graphique

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 18 \\ 0 \leq y \leq 18 \\ x < y \\ y \geq -2x + 30 \end{cases}$$

On trace les droites $(d_1): y = x, (d_2): y = -2x + 30, (d_3): y = 18$ (qui représentent les fonctions affines f_1, f_2 et f_3 respectivement) et $(d_4): x = 18$.

x	0	10
$f_1(x) = x$	0	10

x	10	15
$f_2(x) = -2x + 30$	10	0

(3) D'après l'énoncé :

$$2(y - 6) = x$$

C'est-à-dire :

$$y - 6 = \frac{1}{2}x$$

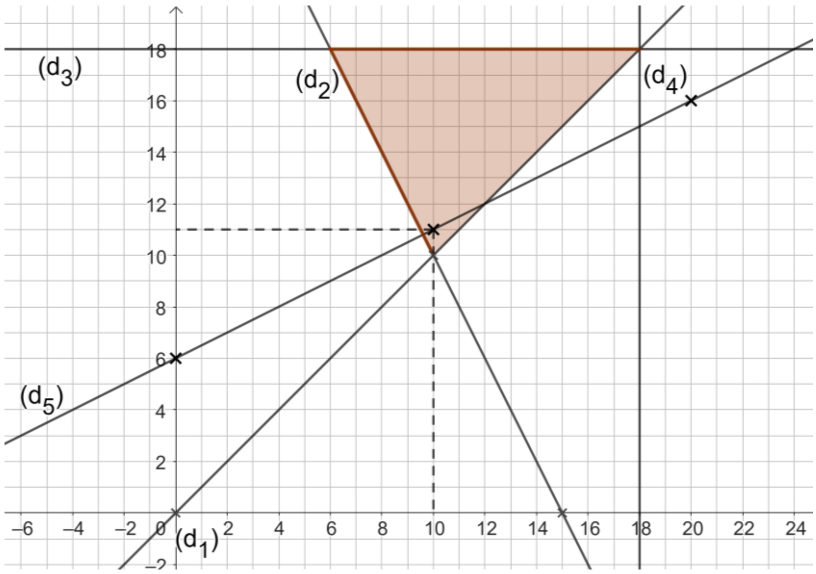
C'est-à-dire :

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

On trace alors la droite $(d_5): y = \frac{1}{2}x + 6$ (qui représente la fonction affine f_5).

x	0	20
$f_5(x) = x$	6	16

Le seul point qui convient est de coordonnées $(10; 11)$. Cet étudiant a donc obtenu 10 à l'écrit et 11 à l'oral.



Partie C

(1) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
signe de $x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

(2) D'après la question précédente, on a la disjonction de cas suivante, avec $x \in \mathbb{R}$:

<u>1er cas :</u> $x < -2$

$$f(x) = -(x-1) - \big(-(x+2)\big) + (-x) = -x + 1 + x + 2 - x = -x + 3$$

<u>2ème cas :</u> $-2 \leq x < 0$

$$f(x) = -(x-1) - (x+2) + (-x) = -x + 1 - x - 2 - x = -3x - 1$$

<u>3ème cas :</u> $0 \leq x < 1$

$$f(x) = -(x-1) - (x+2) + x = -x + 1 - x - 2 + x = -x - 1$$

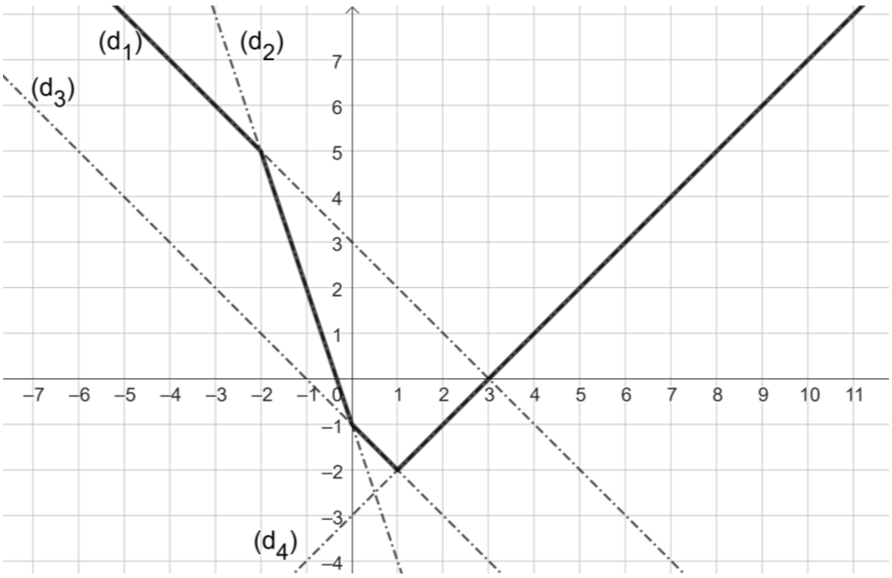
<u>4ème cas :</u> $1 \leq x$

$$f(x) = x - 1 - (x+2) + x = x - 1 - x - 2 + x = x - 3$$

<u>Pour résumer :</u>

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 3 \text{ si } x < -2 \\ -3x - 1 \text{ si } -2 \leq x < 0 \\ -x - 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ x - 3 \text{ si } 1 \leq x \end{cases}$$

(3) On trace les droites $(d_1): y = -x + 3$, $(d_2): y = -3x - 1$, $(d_3): y = -x - 1$ et $(d_4): y = x - 3$, puis on en déduit la courbe représentative de la fonction f :



(4) D'après la question précédente, puisque $(I) \Leftrightarrow f(x) > 2$, on obtient pour ensemble solution :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[$$

Exercice 3 – Résolutions de systèmes linéaires

Partie A

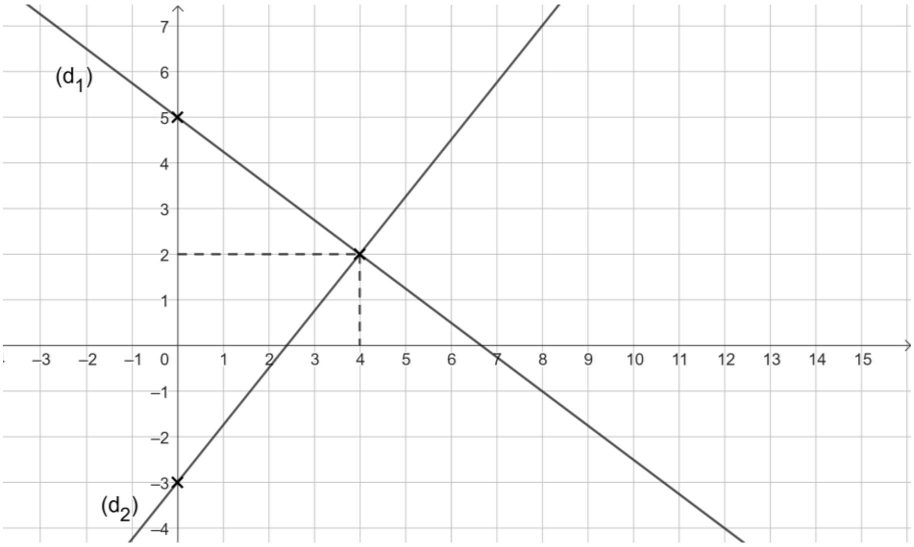
(1)(a) On a :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ -5x + 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -3x + 20 \\ 4y = 5x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-3x+20}{4} \\ y = \frac{5x-12}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 5 \\ y = \frac{5}{4}x - 3 \end{cases}$$

(b) On trace $(d_1): y = -\frac{3}{4}x + 5$ (qui représente la fonction f_1) et $(d_2): y = \frac{5}{4}x - 3$ (qui représente la fonction f_2).

x	0	4
$f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 5$	5	2

x	0	4
$f_2(x) = \frac{5}{4}x - 3$	-3	2



(c) On obtient $\mathcal{S}_1 = \{(4;2)\}$.

(2) On a :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ -5x + 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 20 \\ -8x = -32 \end{cases} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 4 + 4y = 20 \\ x = \frac{-32}{-8} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 20 - 12 \\ x = 4 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{4} = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

On obtient bien, de même que dans la question précédente, $\mathcal{S}_1 = \{(4;2)\}$.

Partie B

(1) On a :

$$\begin{cases} 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7 \\ -3 \times 2 + (-2) = -6 - 2 = -8 \\ 3 + 2 \times (-2) = 3 - 4 = -1 \neq -3 \end{cases}$$

Ainsi le triplet $(2; 3; -2)$ (qui est solution des deux premières équations du sytsème, mais pas de la troisième) n'est pas solution du système (S_2).

(2) On a :

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ -3x + z = -8 \\ y + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow_{(L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1)} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3y + 2z = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow_{(L_2 \leftrightarrow L_3)} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ y + 2z = -3 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$(S_2) \Leftrightarrow_{(L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ y + 2z = -3 \\ -4z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 7 - y = 7 - 4 = 3 \\ y = -3 - 2z = -3 - 2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 4 \\ z = \frac{14}{-4} = -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 4 \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}_2 = \left\{\left(\frac{3}{2}; 4; -\frac{7}{2}\right)\right\}$.

Partie C

(1) On a :

$$(\mathcal{S}_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x - 2 \times (-2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 7x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \times \frac{1}{7} = -\frac{2}{7} \\ x = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}_0 = \left\{\left(\frac{1}{7}; -\frac{2}{7}\right)\right\}$.

(2) De même :

$$(\mathcal{S}_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x - 2 \times (1 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 7x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{S}_1 = \left\{\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)\right\}$.

(3)(a) Soit λ un réel fixé. On a :

$$(\mathcal{S}_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = \lambda \\ 3x - 2y = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda - 2x \\ 3x - 2 \times (\lambda - 2x) = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda - 2x \\ 7x - 2\lambda = 1 - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda - 2x \\ 7x = 1 + \lambda \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$(\mathcal{S}_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda - 2 \times \frac{1+\lambda}{7} \\ x = \frac{1+\lambda}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7\lambda}{7} - \frac{2(1+\lambda)}{7} \\ x = \frac{1+\lambda}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7\lambda-2-2\lambda}{7} = \frac{-2+5\lambda}{7} \\ x = \frac{1+\lambda}{7} \end{cases}$$

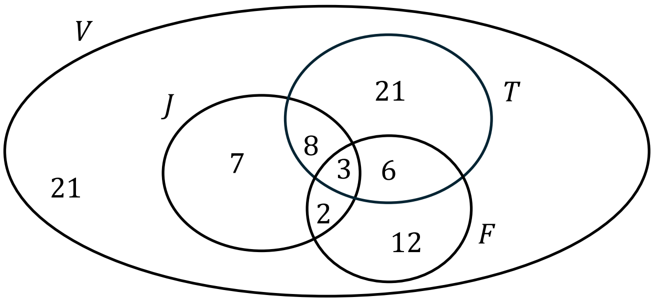
Donc $\mathcal{S}_\lambda = \left\{\left(\frac{1+\lambda}{7}; \frac{-2+5\lambda}{7}\right)\right\}$.

(b) Avec $\lambda = 0$, la question précédente donne $\left(\frac{1+\lambda}{7}; \frac{-2+5\lambda}{7}\right) = \left(\frac{1}{7}; \frac{-2}{7}\right)$, donc $\mathcal{S}_0 = \left\{\left(\frac{1}{7}; -\frac{2}{7}\right)\right\}$, ce qui confirme bien le résultat de la question (1).

De même, avec $\lambda = 1$, la question précédente donne $\left(\frac{1+\lambda}{7}; \frac{-2+5\lambda}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$, donc $\mathcal{S}_1 = \left\{\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)\right\}$, ce qui confirme bien le résultat de la question (2).

Exercice 4 – Ensembles et dénombrement

Partie A



Grâce à ce diagramme de Venn, on peut affirmer que 21 enfants n'ont pratiqué aucune des 3 activités.

Partie B

(1) On a :

$$\mathcal{E} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \mathcal{A} \backslash (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}$$
$$\mathcal{G} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \backslash (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \backslash \mathcal{A}) = (\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}) \cup (\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B})$$
$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$$

(2) On cherche $card(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Or, d'après l'énoncé, on a :

$$card(\mathcal{A}) = 20; card(\overline{\mathcal{B}}) = 76 \text{ et } card(\bar{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}) = 71\,)$$

D'où :

$$card(\mathcal{B}) = 100 - card(\overline{\mathcal{B}}) = 100 - 76 = 24$$

Et puisque $\overline{\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}} = \overline{\overline{\mathcal{A}}} \cup \overline{\overline{\mathcal{B}}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$:

$$card(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = card\left(\overline{\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}}\right) = 100 - card(\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}) = 100 - 71 = 29$$

Ainsi, puisque $card(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = card(\mathcal{A}) + card(\mathcal{B}) - card(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, il vient :

$$29 = 20 + 24 - card(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

C'est-à-dire :

$$card(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 44 - 29 = 15$$

Ainsi, 15 pièces présentent les deux défauts à la fois.

Partie C

(1) Soit $(x; y)$ un couple de nombres réels. On a :

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

C'est-à-dire :

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

(2) L'ensemble des codes possibles avec un digicode classique est donné par :

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} = \mathcal{C}^4$$

Ainsi :

$$N_1 = card(\mathcal{C}^4) = \left(card(\mathcal{C})\right)^4 = 10^4 = 10\,000$$

Avec un digicode classique, on peut composer $10^4 = 10\,000$ codes possibles.

(3) L'ensemble des codes possibles ne contenant aucun chiffre 4 est donné par :

$$(\mathcal{C}\backslash\{4\}) \times (\mathcal{C}\backslash\{4\}) \times (\mathcal{C}\backslash\{4\}) \times (\mathcal{C}\backslash\{4\}) = (\mathcal{C}\backslash\{4\})^4$$

Ainsi :

$$N_2 = card((\mathcal{C}\backslash\{4\})^4) = \left(card(\mathcal{C}\backslash\{4\})\right)^4 = 9^4$$

$(9^4 = (9^2)^2 = 81^2 = (80 + 1)^2 = 80^2 + 2 \times 80 \times 1 + 1^2 = 6400 + 160 + 1 = 6561)$.

Il y a en tout 9^4 $(= 6561)$ codes possibles ne contenant pas le chiffre 4.

(4) D'après les trois questions précédentes, il vient :

$$N_1 - N_2 = 10^4 - 9^4 = (10 - 9) \times (10 + 9) \times (10^2 + 9^2) = 1 \times 19 \times (100 + 81) = 19 \times 181 = 3439$$

Ainsi, l'entreprise chinoise doit supprimer 3439 codes.

Partie D

(1) Puisque le tableau contient $25 \times 25 = 25^2$ cases, l'ensemble des QR-codes possibles est donné par :

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \ldots \times \mathcal{E} = \mathcal{E}^{25^2}$$

Où $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\{blanc; noir\}$.

Ainsi, le nombre N_1 de QR-codes possibles de cette version est égal à :

$$N_1 = card\left(\mathcal{E}^{25^2}\right) = \left(card(\mathcal{E})\right)^{25^2} = 2^{25^2} (= 2^{625})$$

(Puisque $25^2 = (20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 5 + 5^2 = 400 + 200 + 25 = 625$.)

(2) Soit n un entier naturel non nul. De la même manière, puisque cette fois le tableau contient $n \times n = n^2$ cases, le nombre N_2 de QR-codes possibles de cette version est égal à :

$$N_2 = card\left(\mathcal{E}^{n^2}\right) = \left(card(\mathcal{E})\right)^{n^2} = 2^{n^2}$$