Corrigé du Concours Blanc n°3

Exercice 1 – Étude d'une fonction

Partie A

La fonction trinôme du second degré $t: x \mapsto -x^2 + 4x - 2$ admet un discriminant Δ tel que :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 16 - 8 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 > 0$$

Ainsi la fonction t admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{2\times(-1)} = \frac{-2\left(2+\sqrt{2}\right)}{-2} = 2+\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2\times(-1)} = \frac{-2\left(2-\sqrt{2}\right)}{-2} = 2-\sqrt{2}$$

De plus $a = -1 < 0$, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $t(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B

(1)

(a) On a :

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

(b) Les deux instructions ainsi complétées sont :

« if x==2 : »

« y=(-x**2+2*x-2)/(x-2) »

(c) Ces quatre instructions donnent, à 0,1 près :

$$2-\sqrt{2} \approx 0{,}6$$
$$2+\sqrt{2} \approx 3{,}4$$
$$f\left(2-\sqrt{2}\right) \approx 0{,}8$$
$$f\left(2+\sqrt{2}\right) \approx -4{,}8$$

(d) On a :

$$f\left(2+\sqrt{2}\right) = \frac{-\left(2+\sqrt{2}\right)^2+2\left(2+\sqrt{2}\right)-2}{2+\sqrt{2}-2} = \frac{-\left(4+4\sqrt{2}+2\right)+4+2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}} = \frac{\left(-2\sqrt{2}-4\right)\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{-2\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}}{2}$$

C'est-à-dire :

$$f\left(2+\sqrt{2}\right) = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2-2\sqrt{2}$$

(2) (a)

- En $-\infty$, on a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », tandis qu' en $+\infty$, on a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » au numérateur.

Mais la fonction f étant rationnelle, on a par théorème :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (-x)$$

Or par produit $(-1 < 0)$ $\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- La fonction u étant polynomiale, elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 2. Ainsi :

$$\lim_{x\to2} u(x) = u(2) = -2^2 + 2\times2 - 2 = -4 + 4 - 2 = -2$$

De plus $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} (x-2) = 0^-$ et $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} (x-2) = 0^+$, ainsi par quotient $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$.

(b) D'après la question précédente, la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune asymptote horizontale (les limites aux voisinages des infinis étant infinies).
(c) D'après la question (a), la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite (δ) d'équation $x = 2$ pour asymptote verticale.
(3) (a) On a :

$$\begin{array}{r|l} -x^2+2x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-(-x^2+2x)} & -x \\ 0\ -2 & \end{array}$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$-x^2 + 2x - 2 = (x-2) \times (-x) - 2$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-2} = \frac{(x-2)\times(-x)-2}{x-2} = \frac{(x-2)\times(-x)}{x-2} - \frac{2}{x-2} = -x - \frac{2}{x-2}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) - (-x) = \frac{-2}{x-2}$$

Or par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-2} = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(-x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(-x)\big) = 0$.
On en déduit que la droite (d) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
(c) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) + x = f(x) - (-x) = \frac{-2}{x-2}$$

Puisque $-2 < 0$, le nombre $f(x) + x$ est du signe contraire de $x - 2$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $x-2$		$-$	0	$+$	
signe de $f(x)+x$		$+$	$\|\|$	$-$	

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (d) sur l'intervalle $]-\infty; 2[$ et strictement en dessous de (d) sur l'intervalle $]2; +\infty[$.
(4)
(a) Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car polynomiales. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -2x + 2 \text{ et } v'(x) = 1$$

(b) La fonction f étant rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\big(v(x)\big)^2} = \frac{(-2x+2)(x-2)-(-x^2+2x-2)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{-2x^2+4x+2x-4+x^2-2x+2}{(x-2)^2} = \frac{-x^2+4x-2}{(x-2)^2}$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f'(x) = \frac{t(x)}{(x-2)^2}$$

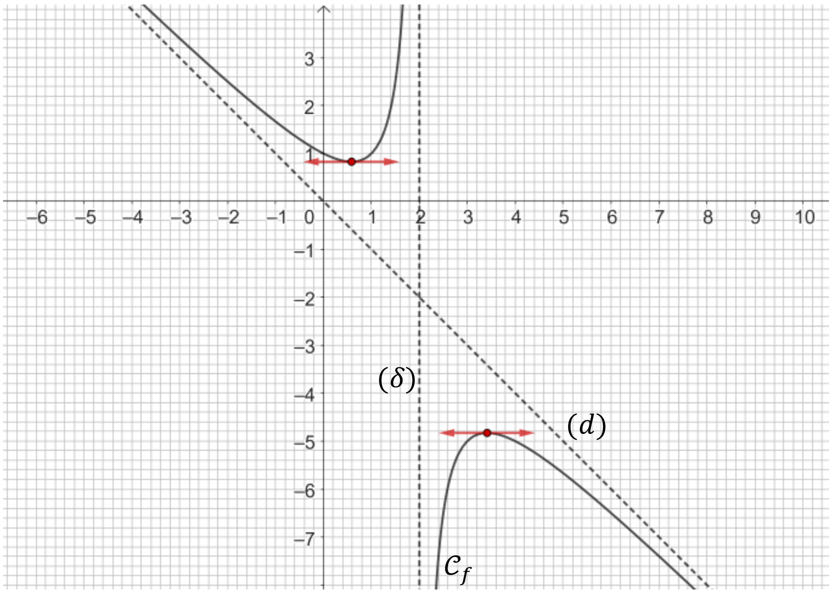
(c) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, (x-2)^2 > 0 \text{ car } x - 2 \neq 0$$

Ainsi le nombre $f'(x)$ est du signe de $t(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. D'où le tableau suivant, d'après le résultat de la partie A :

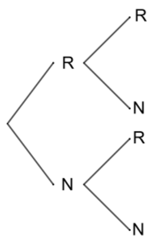
x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $t(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-2-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

(5)



Exercice 2 – des tirages dans une boîte

(1) (a) On a l'arbre des cas possibles suivant :



Ainsi $\Omega_2 = \{(R,R);(R,N);(N,R);(N,N)\}$ et $card(\Omega_2) = 4$.

(b) On a $A_2 = \{(R,N);(N,R)\}$ et $B_2 = \{(R,R);(R,N);(N,R)\}$, donc :

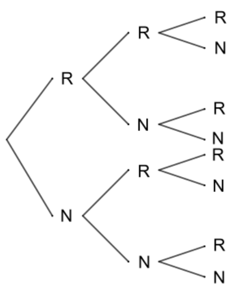
$$P(A_2) = \frac{card\,(A_2)}{card(\Omega_2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } P(B_2) = \frac{card(B_2)}{card(\Omega_2)} = \frac{3}{4}$$

(c) On a $A_2 \cap B_2 = \{(R,N);(N,R)\} = A_2$, donc $P(A_2 \cap B_2) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.

(d) D'après la formule de Poincaré et les deux questions précédentes, on obtient :

$$P(A_2 \cup B_2) = P(A_2) + P(B_2) - P(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(2) (a) On a l'arbre des cas possibles suivant :



Ainsi $\Omega_3 = \{(R,R,R);(R,R,N);(R,N,R);(R,N,N);(N,R,R);(N,R,N);(N,N,R);(N,N,N)\}$ et $card(\Omega_3) = 8$.

(b) On a $A_3 = \{(R,R,N);(R,N,R);(R,N,N);(N,R,R);(N,R,N);(N,N,R)\}$ et $B_3 = \{(R,R,R);(R,R,N);(R,N,R);(N,R,R)\}$, donc :

$$P(A_3) = \frac{card\,(A_3)}{card(\Omega_3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ et } P(B_3) = \frac{card(B_3)}{card(\Omega_3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(c) On a $A_3 \cap B_3 = \{(R,R,N);(R,N,R);(N,R,R)\}$, donc $P(A_3 \cap B_3) = \frac{card(A_3 \cap B_3)}{card(\Omega_3)} = \frac{3}{8}$.

(d) D'après la formule de Poincaré et les deux questions précédentes, on obtient :

$$P(A_3 \cup B_3) = P(A_3) + P(B_3) - P(A_3 \cap B_3) = \frac{6}{8} + \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

(3) (a) Puisque $\Omega_n = U \times U \times \ldots \times U = U^n$, alors $card(\Omega_n) = \left(card(U)\right)^n = 2^n$.

(b) On a:

$$\overline{A_n} : \text{« on obtient des boules d'une seule couleur au cours des } n \text{ tirages »}$$

Ainsi $\overline{A_n} = \{(R,R,\ldots,R);(N,N,\ldots,N)\}$. On en déduit donc :

$$P(\overline{A_n}) = \frac{card(\overline{A_n})}{card(\Omega_n)} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

En outre $B_n = \{(R,R,\ldots,R);(N,R,R,\ldots,R);(R,N,R,R,\ldots,R);\ldots;(R,R,\ldots,R,N,R);(R,R,\ldots,R,N)\}$, donc :

$$P(B_n) = \frac{card(B_n)}{card(\Omega_n)} = \frac{1+n}{2^n}$$

(c) On a $A_n \cap B_n = \{(N,R,R,\ldots,R);(R,N,R,R,\ldots,R);\ldots;(R,R,\ldots,R,N,R);(R,R,\ldots,R,N)\}$, donc :

$$P(A_n \cap B_n) = \frac{card(A_n \cap B_n)}{card(\Omega_n)} = \frac{n}{2^n}$$

(d) D'après la formule de Poincaré et les deux questions précédentes, on obtient :

$$P(A_n \cup B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n) = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1+n}{2^n} - \frac{n}{2^n} = \frac{2^n - 2 + 1 + n - n}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Exercice 3 – Étude d'une suite définie par récurrence

Partie A

La fonction trinôme du second degré $t : x \mapsto x^2 - 5x + 4$ admet $x_1 = 1$ comme racine évidente (en effet, $1^2 - 5 \times 1 + 4 = 1 - 5 + 4 = -4 + 4 = 0$). Sa deuxième racine x_2 vérifie alors la relation $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. D'où $1 \times x_2 = \frac{4}{1}$, c'est-à-dire $x_2 = 4$. De plus $a = 1 > 0$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
signe de $t(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $S_1 =]1;4[$.

Partie B

(1) (a) On a :

$$\begin{cases} u_1 = f(u_0) = \sqrt{5u_0 - 4} = \sqrt{5 \times \frac{13}{5} - 4} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3 \\ u_2 = f(u_1) = \sqrt{5u_1 - 4} = \sqrt{5 \times 3 - 4} = \sqrt{11} \end{cases}$$

(b) On a $u_0 = \frac{13}{5} = \frac{26}{10} = 2{,}6$ et $u_1 = 3$ d'après la question précédente, donc $u_0 < u_1$.

De plus $0 < 9 < 11$, donc $\sqrt{9} < \sqrt{11}$, car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $3 < \sqrt{11}$, c'est-à-dire $u_1 < u_2$.

Finalement, on a bien $u_0 < u_1 < u_2$.

(c) Les deux instructions ainsi complétées sont :

« for i in range(1,n+1): » ou « for i in range(n): »

« u=sqrt(5*u-4) »

(2) Notons, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n : « u_n existe et $u_n \geq 1$ ».

<u>Initialisation</u>

Par définition de la suite (u_n), u_0 existe et $u_0 \geq 1$ puisque $u_0 = \frac{13}{5} = 2{,}6$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que P_n est vraie. Démontrons que P_{n+1} est vraie.
Puisque P_n est supposée vraie, le nombre u_n existe et $u_n \geq 1$. En multipliant par $5 > 0$, on a alors $5u_n \geq 5$. Puis en retranchant 4, on obtient $5u_n - 4 \geq 1$. La fonction racine carrée étant (strictement) croissante sur $\mathbb{R}^+$, puisque $5u_n - 4 \geq 1 \geq 0$, il vient $\sqrt{5u_n - 4} \geq \sqrt{1} = 1$.
Ainsi, le nombre $u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}$ existe et $u_{n+1} \geq 1$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 1$$

(3) (a) On a :

$$5x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{5} \text{ (car } 5 > 0)$$

Donc $\mathcal{D}_f = [\frac{4}{5}; +\infty[$.

(b) On a :

$$\forall x \in [\frac{4}{5}; +\infty[, f(x) = \sqrt{v(x)}, \text{ où } v(x) = 5x - 4$$

Or la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$, car affine, et strictement positive sur l'intervalle $]\frac{4}{5}; +\infty[$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 5$$

Ainsi, par composition, la fonction f est dérivable sur $]\frac{4}{5}; +\infty[$, avec :

$$\forall x \in]\frac{4}{5}; +\infty[, f'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$$

Or :

$$\begin{cases} 5 > 0 \\ 2 > 0 \\ \forall x \in]\frac{4}{5}; +\infty[, \sqrt{5x-4} > 0 \text{ car } 5x - 4 > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall x \in]\frac{4}{5}; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$\frac{4}{5}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|$ $\qquad$ $+$
variations de f	0 $\nearrow$

(En effet :

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{5 \times \frac{4}{5} - 4} = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0\,)$$

(c) Notons, pour tout n de $\mathbb{N}$, Q_n : « $u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation

D'après la question (1)(b), on a $u_0 < u_1$. Ainsi Q_0 est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que Q_n est vraie. Démontrons que Q_{n+1} est vraie.
Puisque Q_n est supposée vraie, on a $u_n < u_{n+1}$. De plus, d'après la question (2), $u_n \geq 1$. Ainsi :

$$\frac{4}{5} < 1 \leq u_n < u_{n+1}$$

Or, d'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{4}{5}; +\infty[$, donc $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est à-dire, par définition de la suite (u_n), $u_{n+1} < u_{n+2}$. Ainsi Q_{n+1} est vraie.

Conclusion
D'après le principe de récurrence, Q_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 0.

(4) (a) On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+, (I_2) &\Leftrightarrow f(x) - x > 0\\ &\Leftrightarrow f(x) > x\\ &\Leftrightarrow \sqrt{5x-4} > x \geq 0 \text{ (car } x \in \mathbb{R}^+\text{)}\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x-4}\right)^2 > x^2 \text{ (car la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+\text{)}\\ &\Leftrightarrow 5x-4 > x^2\\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0\\ &\Leftrightarrow x \in]1;4[\text{ (d'après le résultat de la partie A)}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_2 =]1;4[$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question (3)(c), on a $u_n < u_{n+1}$, c'est-à-dire $f(u_n) > u_n$, c'est-à-dire encore $f(u_n) - u_n > 0$. De plus $u_n \in \mathbb{R}^+$, car $u_n \geq 1$ d'après la question (2). Ainsi le nombre u_n est solution de l'inéquation (I_2). On en déduit donc, d'après la question précédente :

$$u_n \in]1;4[$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 4$$

La suite (u_n) est donc bornée (car minorée par 1 et majorée par 4).

(5) Les trois instructions ainsi complétées sont :

« while u<3.999: »

« n=n+1 »

« u=sqrt(5*u-4) »

Exercice 4 – classe d'une fonction définie par morceaux

(1) (a) On a :

$$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Ainsi $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

(b) La fonction u étant rationnelle, elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}, u(x) = -18 \times \frac{1}{w(x)} \text{, avec } w(x) = x - 4$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}, u'(x) = -18 \times \left(-\frac{w'(x)}{(w(x))^2}\right) = 18 \times \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{18}{(x-4)^2}$$

En effet, la fonction w étant affine, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = 1$$

(2) (a) La fonction racine carrée est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Par produit et somme, la fonction v est donc également définie et continue sur $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}^+$.

(b) La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, il en va de même de la fonction v, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, v'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(3) (a) La fonction u étant continue sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$, la fonction f est continue sur $]-\infty;1[$.

La fonction v étant continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est continue sur $]1;+\infty[$.

De plus :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} u(x) = u(1) = -\frac{18}{1-4} = -\frac{18}{-3} = 6$ (car la fonction u est continue en 1 car continue sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$) ;

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} v(x) = v(1) = 4\sqrt{1} + 2 = 4 \times 1 + 2 = 6$ (car la fonction v est continue en 1 car continue sur $\mathbb{R}^+$) ;

- $f(1) = -\frac{18}{1-4} = 6.$

On en déduit donc que la fonction f est continue en 1, puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1).$

Finalement, la fonction f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

(b) D'une part, pour tout réel h de $\mathbb{R}^{*-}$ suffisamment proche de 0, on a :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-\frac{18}{1+h-4}-6}{h} = \left(-\frac{18}{h-3} - 6\right) \times \frac{1}{h} = \frac{-18-6(h-3)}{h-3} \times \frac{1}{h} = \frac{-18-6h+18}{h-3} \times \frac{1}{h} = \frac{-6h}{h-3} \times \frac{1}{h} = \frac{-6}{h-3}$$

Or par différence $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} (h-3) = -3$, donc par quotient $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{-6}{h-3} = 2$. C'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$$

On en déduit que la fonction f est dérivable à gauche en 1, avec $f_g'(1) = 2$.

D'autre part, pour tout réel h de $\mathbb{R}^{*+}$ suffisamment proche de 0, on a :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4\sqrt{1+h}+2-6}{h} = \frac{4\sqrt{1+h}-4}{h} = \frac{4\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h} = \frac{4\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \frac{4\left(\left(\sqrt{1+h}\right)^2-1^2\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \frac{4(1+h-1)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \frac{4}{\sqrt{1+h}+1}$$

Or, puisque la fonction racine carrée est continue en 1 (car continue sur $\mathbb{R}^+$), on a $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \sqrt{1+h} = \sqrt{1} = 1$. Ainsi par somme $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \left(\sqrt{1+h}+1\right) = 2$. C'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$$

On en déduit que la fonction f est dérivable à droite en 1, avec $f_d'(1) = 2$.

Finalement, puisque $f_g'(1) = f_d'(1) = 2$, la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

(c) La fonction u étant dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$, la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$.

La fonction v étant dérivable sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f est dérivable sur $]1; +\infty[$.

De plus, d'après la question précédente, la fonction f est dérivable en 1.

Donc finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(d) On a $f(1) = 6$ et, d'après la question (b) précédente, $f'(1) = 2$. Ainsi :

$$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

C'est-à-dire :

$$T_1 : y = 2(x-1) + 6$$

C'est-à-dire :

$$T_1 : y = 2x + 4$$

(4) D'après les trois questions précédentes, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \begin{cases} \frac{18}{(x-4)^2} \text{ si } x \in]-\infty; 1[\\ 2 \text{ si } x = 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{18}{(x-4)^2}$ étant rationnelle, elle est continue sur son ensemble de définition

$\mathcal{D}_a = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ (en effet, $(x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$). Ainsi la fonction f' est continue sur $]-\infty;1[$.
La fonction racine carrée étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^{*+}$, la fonction $b\colon x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$. Ainsi la fonction f' est continue sur $]1;+\infty[$.
De plus :
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} a(x) = a(1) = \frac{18}{(1-4)^2} = \frac{18}{9} = 2$ (car la fonction a est continue en 1 car continue sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$) ;
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} b(x) = b(1) = \frac{2}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2$ (car la fonction b est continue en 1 car continue sur $\mathbb{R}^{*+}$) ;
- $f'(1) = 2$.
On en déduit donc que la fonction f' est continue en 1, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x) = f'(1)$.

Finalement, la fonction f' est bien continue sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(5)

```
from math import sqrt

def f(x):
  if x<=1:
    y=-18/(x-4)
  else:
    y=4*sqrt(x)+2
  return y
```