Corrigé du Concours Blanc n°4

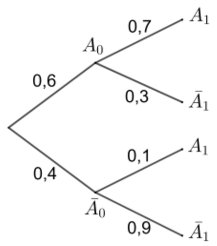
Exercice 1 – probabilités et suite numérique

Partie A

(1) D'après l'énoncé, on a :

$$p_0 = P(A_0) = 0{,}6;\ P_{A_0}(\overline{A_1}) = 0{,}3 \text{ et } P_{\overline{A_0}}(A_1) = 0{,}1$$

(2) On a l'arbre pondéré suivant :



(3) On a :

$$P(A_0 \cap A_1) = P(A_0) \times P_{A_0}(A_1) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$$

La probabilité qu'un salarié utilise sa voiture personnelle en 2023 et en 2024 est de 0,42.

(4) Puisque les événements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p_1 = P(A_1) = P(A_0 \cap A_1) + P(\overline{A_0} \cap A_1) = P(A_0) \times P_{A_0}(A_1) + P(\overline{A_0}) \times P_{\overline{A_0}}(A_1)$$

C'est-à-dire (d'après la question précédente) :

$$p_1 = 0{,}42 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}42 + 0{,}04 = 0{,}46$$

Ainsi $p_1 = 0{,}46$.

(5) On a (par définition d'une probabilité conditionnelle) :

$$P_{\overline{A_1}}(A_0) = \frac{P(\overline{A_1} \cap A_0)}{P(\overline{A_1})} = \frac{P(A_0) \times P_{A_0}(\overline{A_1})}{1 - P(A_1)}$$

C'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$P_{\overline{A_1}}(A_0) = \frac{0{,}6 \times 0{,}3}{1 - 0{,}46} = \frac{0{,}18}{0{,}54} = \frac{1}{3}$$

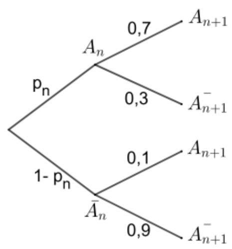
Sachant qu'un salarié n'utilise pas sa voiture personnelle en 2024, la probabilité pour qu'il l'ait utilisée en 2023 est de $\frac{1}{3}$.

Partie B

(1) Soit n un entier naturel. On a d'après l'énoncé :

$$P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) = 1 - p_n;\ P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}1 \text{ et } P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = 0{,}3$$

(2) On a l'arbre pondéré suivant :



(3) Soit n un entier naturel. Puisque les événements A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

C'est-à-dire :

$$p_{n+1} = p_n \times 0{,}7 + (1-p_n) \times 0{,}1 = 0{,}7p_n + 0{,}1 - 0{,}1p_n = 0{,}6p_n + 0{,}1 = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{10}$$

Ainsi $p_{n+1} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{10}$.

(4) Les deux instructions incomplètes sont :

« for i in range(1,n+1) : »

« p=3/5*p+1/10 »

Partie C

(1)

(a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow x - \frac{3}{5}x = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{5}x - \frac{3}{5}x = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

(b)

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u_n = p_n - \frac{1}{4}$. On a alors :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{3}{5} \times p_n + \frac{1}{10} & \text{(d'après la question (3) de la partie B)} \\ \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} & \text{(d'après la question précédente)} \end{cases}$$

En retranchant membre à membre ces deux inégalités, on obtient :

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \times p_n - \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

Ainsi $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme :

$$u_0 = p_0 - \frac{1}{4} = 0{,}6 - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$$

- La formule explicite pour les suites géométriques donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = \frac{7}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n + \frac{1}{4} = \frac{7}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{4}$$

(2)

(a) On conjecture que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$.

(b) On en déduit, par produit, que $\lim_{n\to+\infty} (\frac{7}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n) = 0$. Puis, par somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}$.

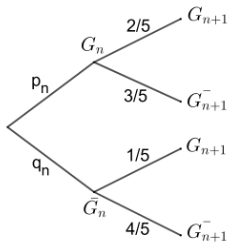
(c) On en déduit que plus les années passent, plus la proportion de personnes utilisant leur voiture personnelle pour aller au travail va tendre à se rapprocher de 25%.

Exercice 2 – probabilités et calcul matriciel

(1) D'après l'énoncé, avec n un entier naturel, on a :

$$U_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P_{G_n}(G_{n+1}) = \frac{2}{5} \text{ et } P_{\overline{G_n}}(\overline{G_{n+1}}) = \frac{4}{5}$$

(2) On a l'arbre pondéré suivant :



(3)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les événements G_n et $\overline{G_n}$ forment un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ q_{n+1} = P(\overline{G_{n+1}}) = P(G_n \cap \overline{G_{n+1}}) + P(\overline{G_n} \cap \overline{G_{n+1}}) = P(G_n) \times P_{G_n}(\overline{G_{n+1}}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(\overline{G_{n+1}}) \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{5} + q_n \times \frac{1}{5} \\ q_{n+1} = p_n \times \frac{3}{5} + q_n \times \frac{4}{5} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{5} p_n + \frac{1}{5} q_n \\ q_{n+1} = \frac{3}{5} p_n + \frac{4}{5} q_n \end{cases}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a directement :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = A \times U_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(4) Notons, pour tout entier naturel n, P_n : « $U_n = A^n U_0$ ».

<u>Initialisation</u>

On a par convention $A^0 = I_2$, d'où :

$$A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$$

C'est-à-dire $U_0 = A^0 U_0$, donc P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que P_n est vraie. On a :

$U_{n+1} = AU_n$ (d'après la question précédente)

$= A(A^n U_0)$ (car $U_n = A^n U_0$ puisque P_n est supposée vraie)

$= (AA^n)U_0$ (par associativité du produit matriciel)

$= A^{n+1} U_0$

C'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1} U_0$$

Ainsi P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$$

(5)

(a) On a $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $QP = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

(b) On a de même $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}$ et $PDQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = A$

On remarque que $PDQ = A$.

(c) Notons, pour tout entier naturel n, H_n : « $A^n = PD^nQ$ ».

<u>Initialisation</u>

On a d'une part par convention $A^0 = D^0 = I_2$. D'autre part :

$$PD^0Q = PI_2Q = PQ = I_2 \text{ (d'après la question (5)(a))}$$

Ainsi $A^0 = PD^0Q$, donc H_0 est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que H_n est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= APD^nQ \text{ (car } A^n = PD^nQ \text{ car } H_n \text{ est supposée vraie)} \\ &= PDQPD^nQ \text{ (car } A = PDQ \text{ d'après la question précédente)} \\ &= PDI_2D^nQ \text{ (car } QP = I_2 \text{ d'après la question (5)(a))} \\ &= PDD^nQ \\ &= PD^{n+1}Q \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PD^{n+1}Q$$

Donc H_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nQ$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque D est diagonale, on a tout d'abord $D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 1 \\ -\left(\frac{1}{5}\right)^n & 3 \end{pmatrix}$$

Et ainsi :

$$PD^nQ = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 1 \\ -\left(\frac{1}{5}\right)^n & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(6)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question (1), on a $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$A^nU_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire, d'après la question (4) :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} p_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} \\ q_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4} \end{cases}$.

(b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, on en déduit par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n) = 0$.
D'où, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \frac{3}{4}$.
On en déduit que plus Claude joue un grand nombre de parties, plus la probabilité qu'il gagne tend à se rapprocher de $\frac{1}{4}$ (et donc la probabilité qu'il perde tend à se rapprocher de $\frac{3}{4}$).

Exercice 3 – une étude de fonction

Partie A

(1)

(a) On a $g\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 7\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{\sqrt{7}} - 1 = 7 \times \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}} - 1 = 7 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}} - 1$,
C'est-à-dire $g\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{7}} - 1$.

(b) De même $g\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = 7\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - 1 = -7 \times \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}} - 1$, c'est-à-dire
$g\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = -7 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}} - 1 = -\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{7}} - 1$.

(c) On a $\begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{2^2}{(\sqrt{7})^2} = \frac{4}{7} \\ 1^2 = 1 \end{cases}$. Or $\frac{4}{7} < 1$, d'où $0 < \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 < 1^2$. Ainsi, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, il vient $\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} < \sqrt{1^2}$, c'est-à-dire $\left|\frac{2}{\sqrt{7}}\right| < |1|$, c'est-à-dire $\frac{2}{\sqrt{7}} < 1$ (puisque $\frac{2}{\sqrt{7}}$ et 1 sont deux nombres positifs). Ainsi $\frac{2}{\sqrt{7}} - 1 < 0$, c'est-à-dire $g\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) < 0$.

(2) On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». Mais puisque g est polynomiale, on a par théorème $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 7x^3$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc, par produit ($7 > 0$), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(3)

(a) La fonction g étant polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 7 \times 3x^2 - 3 = 21x^2 - 3 = 21\left(x^2 - \frac{3}{21}\right) = 21\left(x^2 - \frac{1}{7}\right) = 21\left(x^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2\right)$$

Or $\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 21\left(x - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

(b) Puisque $21 > 0$, la forme factorisée, de la fonction trinôme du second degré g', établie dans la question précédente donne le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{7}}$		$\frac{1}{\sqrt{7}}$		α		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
variations de g		$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{7}}-1$	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt{7}}-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(4)

(a)

- D'après la question précédente, sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{\sqrt{7}}]$, la fonction g admet le maximum de $\frac{2}{\sqrt{7}}-1$ atteint en $-\frac{1}{\sqrt{7}}$. Ainsi, puisque le nombre $\frac{2}{\sqrt{7}}-1$ est strictement négatif (d'après la question (1)(c)), la fonction g ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{7}}; +\infty[$, la fonction g est continue, car polynomiale, et strictement croissante (d'après la question précédente). Ainsi, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{7}}; +\infty[$ sur l'intervalle $g([\frac{1}{\sqrt{7}}; +\infty[) = [-\frac{2}{\sqrt{7}}-1; +\infty[$. Or $0 \in [-\frac{2}{\sqrt{7}}-1; +\infty[$ (puisque le nombre $-\frac{2}{\sqrt{7}}-1$ est strictement négatif), donc 0 admet un unique antécédent α par g dans l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{7}}; +\infty[$.
- Finalement, l'équation (E): $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, avec $\alpha \in [\frac{1}{\sqrt{7}}; +\infty[$.

(b)

- On a $\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{1^2}{(\sqrt{7})^2} = \frac{1}{7} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$. Or $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$, d'où $0 < \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Ainsi, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, il vient $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} < \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$, c'est-à-dire $\left|\frac{1}{\sqrt{7}}\right| < \left|\frac{1}{2}\right|$, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$ (puisque $\frac{1}{\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{2}$ sont deux nombres positifs).
- De plus $g(1) = 7 \times 1^3 - 3 \times 1 - 1 = 7 - 3 - 1 = 3$

et $g\left(\frac{1}{2}\right) = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{2} - 1 = 7 \times \frac{1}{8} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{7-12-8}{8} = -\frac{13}{8}$.

- Ainsi, puisque $-\frac{13}{8} < 0 < 3$, on a $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$. Or, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $I = [\frac{1}{\sqrt{7}}; +\infty[$ (d'après la question (3)(b))). De plus :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \in I \text{ (d'après le premier point)} \\ \alpha \in I \text{ (d'après la question précédente)} \\ 1 \in I \left(\text{puisque } \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2} < 1\right) \end{cases}$$

Ainsi $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

(c) Puisque $g(\alpha) = 0$, on a $7\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$, c'est-à-dire $7\alpha^3 = 3\alpha + 1$, c'est-à-dire $\alpha^3 = \frac{3\alpha+1}{7}$.

(5) D'après les questions (3)(b) et (4)(a), on obtient le tableau de signes de la fonction g sur $\mathbb{R}$ suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

(1) Pour $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x - 1)$, on a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». Mais puisque la fonction $v: x \mapsto x^3 - x - 1$ est polynomiale, on a par théorème $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(2)

(a) On a $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}(\alpha^3 - \alpha - 1)$. Or, d'après la question (4)(c) de la partie A, $\alpha^3 = \frac{3\alpha+1}{7}$. Ainsi :

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{3\alpha+1}{7} - \alpha - 1\right) = \sqrt{\alpha} \times \frac{3\alpha+1-7\alpha-7}{7} = \sqrt{\alpha} \times \frac{-4\alpha-6}{7}$$

C'est-à-dire $f(\alpha) = -\sqrt{\alpha}\frac{4\alpha+6}{7}$.

(b) Puisque, d'après le résultat de la question (4)(b) de la partie A, $0 < \frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a d'une part, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\alpha} < \sqrt{1}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\alpha} < 1$.

D'autre part, en multipliant par $4 > 0$, on a $2 < 4\alpha < 4$. Puis, en ajoutant 6, on obtient $8 < 4\alpha + 6 < 10$. Et en divisant par $7 > 0$, il vient $\frac{8}{7} < \frac{4\alpha+6}{7} < \frac{10}{7}$.

En multipliant ces deux inégalités membre à membre (ce qui est licite, étant donné que tous les nombres mis en jeu sont positifs), on obtient $\frac{8}{7\sqrt{2}} < \sqrt{\alpha}\frac{4\alpha+6}{7} < \frac{10}{7}$.

Finalement, en multipliant par $-1 < 0$, il vient $-\frac{8}{7\sqrt{2}} > -\sqrt{\alpha}\frac{4\alpha+6}{7} > -\frac{10}{7}$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$-\frac{10}{7} < f(\alpha) < -\frac{8}{7\sqrt{2}}$$

(3)

(a) La fonction racine carré u est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fonction polynomiale v est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, v'(x) = 3x^2 - 1$$

Ainsi, la fonction $f = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3 - x - 1) + \sqrt{x}(3x^2 - 1) = \frac{x^3-x-1}{2\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x})^2(3x^2-1)}{2\sqrt{x}}$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f'(x) = \frac{x^3-x-1+2x(3x^2-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{x^3-x-1+6x^3-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3-3x-1}{2\sqrt{x}}$$

C'est-à-dire enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

(b) Puisque, pour tout réel x strictement positif, $2\sqrt{x} > 0$ (puisque $2 > 0$ et que la fonction racine carrée est strictement positive sur $\mathbb{R}^{*+}$), le nombre $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

La question (5) de la partie A donne alors le tableau suivant ($\alpha > 0$ d'après la question (4)(a) de la partie A) :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	$-\sqrt{\alpha}\frac{4\alpha+6}{7}$	↗	$+\infty$

(En effet, $f(0) = \sqrt{0}(0^3 - 0 - 1) = 0 \times (-1) = 0$.)

(4)

(a) Soit $h \in \mathbb{R}^{*+}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{f(h)}{h} \text{ (car } f(0) = 0\text{)}\\ &= \frac{\sqrt{h}(h^3-h-1)}{h}\\ &= \frac{\sqrt{h}\times h^3 - \sqrt{h}\times h - \sqrt{h}}{h}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{h}\times h^3}{h} - \frac{\sqrt{h}\times h}{h} - \frac{\sqrt{h}}{h}$$
$$= \sqrt{h} \times h^2 - \sqrt{h} - \frac{\sqrt{h}}{(\sqrt{h})^2}$$

Ainsi :

$$\forall h \in \mathbb{R}^{*+}, \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sqrt{h} \times h^2 - \sqrt{h} - \frac{1}{\sqrt{h}}$$

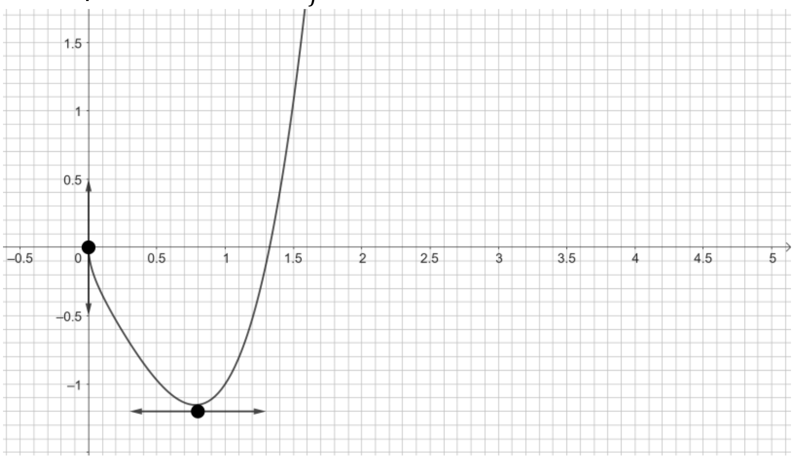
(b) La fonction racine carrée étant continue en 0 (car continue sur $\mathbb{R}^+$) et positive sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0^+$$

On en déduit d'une part par produit que $\lim_{h\to 0^+} \sqrt{h} \times h^2 = 0$, puis par différence $\lim_{h\to 0^+} (\sqrt{h} \times h^2 - \sqrt{h}) = 0$. Et d'autre part, par inverse, $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. On en déduit alors par différence que $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\infty$.

(c) D'après la question précédente, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point O d'abscisse 0 une tangente verticale qui est l'axe des ordonnées.

(5) Voici une allure possible pour la courbe $\mathcal{C}_f$:



Exercice 4 – un jeu de dés

(1) Remarquons que, puisque $\Omega = [\![1;6]\!]^2$, $card(\Omega) = \left(card([\![1;6]\!])\right)^2 = 6^2 = 36$.

(a) On a $C = \{(1;4),(4;1),(2;3),(3;2)\}$, ainsi, puisque l'on est en situation d'équiprobabilité (les deux dés étant parfaitement équilibrés), P désignant la probabilité uniforme, on a :

$$P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(b) En outre $S = \{(1;6),(6;1),(2;5),(5;2),(3;4),(4;3)\}$, on a donc de même :

$$P(S) = \frac{card(S)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(c) On a $A = \bar{C} \cap \bar{S} = \overline{C \cup S}$ (d'après les lois de Morgan), ainsi :

$P(A) = P(\overline{C \cup S})$
$= 1 - P(C \cup S)$
$= 1 - \left(P(C) + P(S)\right)$ (car C et S sont incompatibles)
$= 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6}$
$= \frac{18}{18} - \frac{2}{18} - \frac{3}{18}$
$= \frac{13}{18}$

C'est-à-dire $P(A)=\frac{13}{18}$.

(2) Puisque $\frac{13}{18}\neq 1$, on a :

$$1+\frac{13}{18}+\left(\frac{13}{18}\right)^2=\frac{\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)}{1-\frac{13}{18}}=\frac{\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)}{\frac{18}{18}-\frac{13}{18}}=\frac{\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)}{\frac{5}{18}}=\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)\times\frac{18}{5}$$

C'est-à-dire :

$$1+\frac{13}{18}+\left(\frac{13}{18}\right)^2=\frac{18}{5}\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)$$

(3)

(a) On a $G_5=C_1\cup(A_1\cap C_2)\cup(A_1\cap A_2\cap C_3)$, ainsi, puisque les événements $C_1, A_1\cap C_2$ et $A_1\cap A_2\cap C_3$ sont deux à deux incompatibles, il vient :

$$P(G_5)=P(C_1)+P(A_1\cap C_2)+P(A_1\cap A_2\cap C_3)$$

Et puisque les événements A_1, A_2, C_1, C_2 et C_3 sont mutuellement indépendants, on obtient :

$$P(G_5)=P(C_1)+P(A_1)P(C_2)+P(A_1)P(A_2)P(C_3)$$

Or $P(C_1)=P(C_2)=P(C_3)=P(C)=\frac{1}{9}$ et $P(A_1)=P(A_2)=P(A)=\frac{13}{18}$, donc :

$$P(G_5)=\frac{1}{9}+\frac{13}{18}\times\frac{1}{9}+\frac{13}{18}\times\frac{13}{18}\times\frac{1}{9}$$

C'est-à-dire :

$$P(G_5)=\frac{1}{9}\left(1+\frac{13}{18}+\left(\frac{13}{18}\right)^2\right)$$

La question précédente donne alors :

$$P(G_5)=\frac{1}{9}\times\frac{18}{5}\times\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)=\frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)$$

(b) De même, $G_7=S_1\cup(A_1\cap S_2)\cup(A_1\cap A_2\cap S_3)$, ainsi, puisque les événements $S_1, A_1\cap S_2$ et $A_1\cap A_2\cap S_3$ sont deux à deux incompatibles, il vient :

$$P(G_7)=P(S_1)+P(A_1\cap S_2)+P(A_1\cap A_2\cap S_3)$$

Et puisque les événements A_1, A_2, S_1, S_2 et S_3 sont mutuellement indépendants, on obtient :

$$P(G_7)=P(S_1)+P(A_1)P(S_2)+P(A_1)P(A_2)P(S_3)$$

Or $P(S_1)=P(S_2)=P(S_3)=P(S)=\frac{1}{6}$ et $P(A_1)=P(A_2)=P(A)=\frac{13}{18}$, donc :

$$P(G_7)=\frac{1}{6}+\frac{13}{18}\times\frac{1}{6}+\frac{13}{18}\times\frac{13}{18}\times\frac{1}{6}$$

C'est-à-dire :

$$P(G_7)=\frac{1}{6}\left(1+\frac{13}{18}+\left(\frac{13}{18}\right)^2\right)$$

La question précédente donne alors :

$$P(G_7)=\frac{1}{6}\times\frac{18}{5}\times\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)=\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)$$

(c) Puisque $G=G_5\cup G_7$ et que les deux événements G_5 et G_7 sont incompatibles, on obtient alors d'après les deux questions précédentes :

$$P(G)=P(G_5\cup G_7)=P(G_5)+P(G_7)=\frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)+\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)=\frac{5}{5}\left(1-\left(\frac{13}{18}\right)^3\right)$$

C'est-à-dire $P(G)=1-\left(\frac{13}{18}\right)^3$.

(4)

(a) On a :

$$\bar{G}=A_1\cap A_2\cap A_3$$

(b) Ainsi :

$P(G)=1-P(\bar{G})$

$=1-P(A_1\cap A_2\cap A_3)$

$= 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ (car les événements A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants)

$= 1 - \frac{13}{18} \times \frac{13}{18} \times \frac{13}{18}$ (car $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{13}{18}$)

$= 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^3$

C'est-à-dire $P(G) = 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^3$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question (3)(c).

Barème

Exercice 1	
A-(1)	0,75
A-(2)	2,00
A-(3)	1,25
A-(4)	2,00
A-(5)	1,75
B-(1)	0,75
B-(2)	2,00
B-(3)	2,00
B-(4)	1,00
C-(1)(a)	1,50
C-(1)(b)	3,50
C-(2)(a)	0,50
C-(2)(b)	1,00
C-(2)(c)	1,00
total:	21,00

Exercice 2	
(1)	1,00
(2)	2,00
(3)(a)	2,00
(3)(b)	1,00
(4)	3,00
(5)(a)	2,00
(5)(b)	3,00
(5)(c)	4,00
(5)(d)	3,00
(6)(a)	3,00
(6)(b)	2,00
total:	26,00

Exercice 3	
A-(1)(a)	1,00
A-(1)(b)	1,00
A-(1)(c)	2,00
A-(2)	1,50

A-(3)(a)	2,00
A-(3)(b)	2,50
A-(4)(a)	3,25
A-(4)(b)	4,25
A-(4)(c)	1,00
A-(5)	1,00
B-(1)	1,50
B-(2)(a)	1,00
B-(2)(b)	2,00
B-(3)(a)	2,50
B-(3)(b)	3,00
B-(4)(a)	1,50
B-(4)(b)	2,00
B-(4)(c)	1,00
B-(5)	1,00
total:	35,00

Exercice 4	
(1)(a)	2,00
(1)(b)	1,50
(1)(c)	2,00
(2)	1,50
(3)(a)	3,50
(3)(b)	3,50
(3)(c)	2,00
(4)(a)	0,50
(4)(b)	1,50
total:	18,00

total (4 exos):	100,00