

Loi Binomiale : Rappels

La présente fiche de synthèse vise à rappeler les connaissances sur la loi binômiale.

1 Contexte

On appelle *épreuve de Bernoulli* une expérience aléatoire dans laquelle on distingue un événement particulier nommé *Succès*. Par convention, on appellera *échec* l'événement complémentaire du succès.

On considère ensuite que l'on répète cette expérience à l'identique, de façons indépendantes, un certain nombre n de fois. On s'intéresse alors au nombre de succès obtenus.

Définition : On appelle *schéma de Bernoulli* la répétition d'une épreuve de Bernoulli dans des conditions permettant de supposer que :

- Les événements succès et échecs des différentes épreuves sont mutuellement indépendants
- La probabilité d'obtention de chaque succès est la même
- Le nombre d'épreuves réalisées est un entier naturel non nul

2 Loi de Bernoulli, loi binomiale

Soit \mathcal{E} une épreuve de Bernoulli. On notera p la probabilité d'obtention d'un succès. On considère la variable aléatoire S qui vaut 1 si un succès est obtenu, et 0 sinon. On dit alors que la variable aléatoire S suit la loi de Bernoulli de paramètre p , et on note ce fait $S \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On aura clairement le tableau de loi suivant :

s	0	1
$\mathbb{P}[S = s]$	$1 - p$	p

Définition : Soit un *schéma de Bernoulli* de probabilité de succès p à n répétitions. La variable aléatoire X qui renvoie le nombre de succès de ce schéma suit une loi nommée *loi binomiale* de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$.

En particulier, on a $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$

Exemple : On lance 10 dés à six faces bien équilibrés et on note X le nombre de "six" obtenus. On a alors que X suit la loi $\mathcal{B}(10; \frac{1}{6})$.

Théorème : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$.

Alors la loi de X est également donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Remarque : Il est intéressant de constater la ressemblance avec la formule du binôme de Newton, en écrivant que :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = 1$$

Exercice : Calculer la probabilité d'obtenir deux "six" en lançant cinq dés classiques. *réponse :* $\frac{625}{3888}$

Propriété : Si X suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$, alors $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathbb{V}[X] = np(1 - p)$