

Variables Aléatoires à densité

Exercice 1 On considère la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \end{cases} . \end{aligned}$$

1. Démontrer que f est positive sur \mathbb{R} .
2. Justifier que f est continue sur $] -\infty; 1[$ ainsi que sur $]1; +\infty[$.
3. f est-elle continue en $x = 1$? justifier.
4. Esquisser l'allure de la courbe représentative de f en repère orthonormé.
5. Etablir que f est une densité de probabilités.
6. Soit X une variable aléatoire de densité f .
 - (a) Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}[X \leq 0]$, $\mathbb{P}[X \leq 1]$ ainsi que de $\mathbb{P}[X > 1]$.
 - (b) Déterminer de façon similaire $\mathbb{P}[X \leq 2]$ et $\mathbb{P}[X \leq 3]$.
 - (c) En déduire $\mathbb{P}[X \in]2, 3]$. Que vaut $\mathbb{P}[X \in [2, 3]]$? Interpréter le résultat précédent graphiquement.
 - (d) Calculer enfin $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 5]$

Exercice 2 On considère la fonction g suivante :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } 1 < x \end{cases} . \end{aligned}$$

1. Démontrer que g est positive sur \mathbb{R} .
2. Justifier que g est continue sur $] -\infty; 1[$ ainsi que sur $]1; +\infty[$.
3. g est-elle continue en $x = 1$? justifier.
4. Esquisser l'allure de la courbe représentative de g en repère orthonormé.
5. Etablir que g est une densité de probabilités.
6. Soit Y une variable aléatoire de densité g .
 - (a) Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}[Y \leq 0]$, $\mathbb{P}[Y \leq 1]$ ainsi que de $\mathbb{P}[Y > 1]$.
 - (b) Déterminer de façon similaire $\mathbb{P}[Y \leq 3]$ et $\mathbb{P}[Y \leq 4]$.
 - (c) En déduire $\mathbb{P}[Y \in]3, 4]$. Que vaut $\mathbb{P}[Y \in [3, 4]]$? Interpréter le résultat précédent graphiquement.
 - (d) Calculer enfin $\mathbb{P}[-1 \leq Y \leq 5]$

Exercice 3 On considère une variable aléatoire X dont on admette que la fonction de répartition F est définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$$

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Vérifier que f est continue sur \mathbb{R} et paire.
 - (b) Démontrer que f est une densité de probabilités.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, déterminer une expression explicite de $\int_{-\infty}^x f(t)dt$.
3. En déduire que X est une variable aléatoire à densité.
4. Calculer les valeurs de $\mathbb{P}[X \leq 0]$ ainsi que $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 3]$.

Exercice 4 On considère une variable aléatoire X dont on admette que la fonction de répartition G est définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
 - (a) Vérifier que g est paire et continue sur \mathbb{R}
 - (b) Démontrer que g est une densité de probabilités.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, déterminer une expression explicite de $\int_{-\infty}^x g(t)dt$.
3. En déduire que X est une variable aléatoire à densité.
4. Calculer les valeurs de $\mathbb{P}[X \geq 0]$ ainsi que $\mathbb{P}[-2 \leq X \leq 0]$.

Exercice 5 On définit une fonction F par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{t^2-4}{t^2+5} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{si } t < 2 \end{cases}.$$

1. Vérifier que F est continue en $t = 2$ et en déduire que F est continue sur \mathbb{R} .
2. Etablir que F est dérivable sur $]2; +\infty[$ puis calculer $F'(t)$ pour $t > 2$.
3. Que vaut $F'(t)$ pour $t < 2$?
4. On note f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{si } t > 2 \\ 0 & \text{si } t \leq 2 \end{cases}$
 - (a) Justifier que f est une densité de probabilités.
 - (b) Démontrer que, pour tout réel x , on a $\int_{-\infty}^x f(x)dx = F(t)$.
 - (c) En déduire que, si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F , alors X est à densité.
on désignera ainsi par X une telle variable aléatoire dans la suite.
5. Calculer $\mathbb{P}[X \in [0; a]]$ en fonction du réel $a \geq 0$.

Exercice 6 On définit une fonction G par :

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2-3} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{si } t < 2 \end{cases}.$$

1. Vérifier que G est continue en $t = 2$ et en déduire que G est continue sur \mathbb{R} .
2. Etablir que G est dérivable sur $]2; +\infty[$ puis calculer $G'(t)$ pour $t > 2$.
3. Que vaut $G'(t)$ pour $t < 2$?
4. On note g la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} G'(t) & \text{si } t > 2 \\ 0 & \text{si } t \leq 2 \end{cases}$
 - (a) Justifier que g est une densité de probabilités.

- (b) Démontrer que, pour tout réel x , on a $\int_{-\infty}^x g(x)dx = G(x)$.
- (c) En déduire que, si X est une variable aléatoire de fonction de répartition G , alors X est à densité.
on désignera ainsi par X une telle variable aléatoire dans la suite.
5. Calculer $\mathbb{P}[X \in [0; a]]$ en fonction du réel $a \geq 0$.

Exercice 7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit f_n sur \mathbb{R} par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est continue sur \mathbb{R} .
- Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a F_n minorée par 0 et majorée par 1.
On admet que, pour chaque n entier naturel non nul, F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_n
- Démontrer que X_n est une variable aléatoire à densité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit f_n fonction sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} n(1 - t)^{n-1} & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on observera que, pour $n = 1$, la fonction f_n est constante et vaut 1 sur $[0; 1]$.

- Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0; 1[$.
- Calculer la valeur de $\int_0^1 f_n(t) dt$.
- En déduire que f_n est une densité de probabilités pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}^$, on note X_n la variable aléatoire de densité f_n dans la suite.*
- Déterminer la fonction de répartition de X_n , notée F_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 •Θ[‡] On considère une variable aléatoire X dont une densité h est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{8}{9} - \frac{2}{9}x & \text{si } x \in [1; 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Vérifier que h est bien une densité de probabilités.
- Démontrer que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$ et la calculer.
- On pose $Y = X^2$.
 - Déterminer, pour $x \in [1; 16]$, la valeur de $\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x]$
Indication : On commencera par établir que $\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[1 \leq X \leq \sqrt{x}]$
 - Vérifier que $\mathbb{P}[Y \leq x] = 0$ si $x \leq 1$.
 - Exprimer la fonction de répartition notée G de Y .
 - Vérifier qu'une densité de Y peut être décrite par la fonction $g(x) = \frac{4}{9\sqrt{x}} - \frac{1}{9}$ si $x \in [1; 16]$, et $g(x) = 0$ sinon.
 - Vérifier que Y admet une espérance $\mathbb{E}[Y]$ qui vaut $\frac{9}{2}$.
- Déterminer, finalement, la valeur de variance de X notée $\mathbb{V}[X]$ et en déduire son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 10 On considère une variable aléatoire X dont une densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^4 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilités.
2. Démontrer que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$ et la calculer.
3. On pose $Y = X^2$.
 - (a) Déterminer, pour $x \in [0; 1]$, la valeur de $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq x]$
Indication : On remarquera que $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]$
 - (b) Vérifier que $\mathbb{P}[Y \leq x] = 0$ si $x \leq 0$.
 - (c) Exprimer la fonction de répartition notée G de Y .
 - (d) En déduire une densité de Y notée g .
 - (e) Vérifier que Y admet une espérance pouvant être exprimée par $\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 \frac{5}{2} x^2 \sqrt{x} \, dx$. En donner la valeur.
4. Déterminer, finalement, la valeur de variance de X notée $\mathbb{V}[X]$ et en déduire son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 11 *Première loi de Laplace*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est paire et continue sur \mathbb{R} .
2. Justifier que f est une densité de probabilités.

On notera L une variable aléatoire de densité f dans la suite.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ donné, calculer $\int_0^x t f(t) dt$.
4. En déduire que L admet une espérance $\mathbb{E}[L]$ et la calculer.
5. Déterminer une densité de la variable aléatoire $X = 2L - 1$ et en déduire $\mathbb{E}[X]$.

Cette loi particulière n'est pas à connaître

Exercice 12 *Loi logistique standard*

On reprend la fonction G de l'exercice 4 : $G(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ et on note X une variable aléatoire dont G est une fonction de répartition.

1. Pourquoi X est à densité ? Rappeler alors une densité de X . On notera g dans la suite une telle densité.
2. Justifier que l'on peut choisir $g(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ et $G(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Démontrer que $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est une primitive de G sur \mathbb{R} .
4. Soit x un réel donné. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\int_0^x t g(t) dt$.
5. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Cette loi particulière n'est pas à connaître

Exercice 13 On reprend la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$ de l'exercice 9.

On définit $Y = X^2$ une nouvelle variable aléatoire. Le but de l'exercice est de caractériser la loi de Y .

1. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$
2. Soit $a > 0$ donné. Déterminer $\mathbb{P}[-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}]$ en fonction de a .
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}[Y \leq a]$ en fonction de $a \geq 0$
4. Que vaut $\mathbb{P}[Y \leq a]$ si $a < 0$?
5. En déduire la fonction de répartition de Y . On la notera F_Y dans la suite.
6. On définit la fonction f_Y par $f_Y(x) = F'_Y(x)$ si $x > 0$ et $f_Y(x) = 0$ sinon.
 - (a) Déterminer une expression de $f_Y(x)$ pour $x > 0$.
 - (b) Que vaut $f_Y(x)$ si $x \leq 0$?
 - (c) Expliciter $x f_Y(x)$ pour $x > 0$ et en calculer la limite lorsque x tend vers 0^+ .