.

Matrices : étude spectrale

Exercice $\boxed{1}$ $\bullet\Theta^{\mathrm{C}\sharp}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A - 3I_3$ ainsi que $A^2 - I_3$.
2. Vérifier que $(A - 3I_3)(A^2 - I_3) = O_3$ (matrice nulle carrée d'ordre 3)
3. Proposer un polynôme annulateur de A sous forme développée.
4. En déduire que A est inversible puis exprimer son inverse A^{-1}.

Exercice $\boxed{2}$ $\bullet\Theta^{\mathrm{C}\sharp}$ On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 puis B^3.
2. Vérifier que $P(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3$ est un polynôme annulateur de B.
3. Facoriser le plus possible $P(X)$.
4. En déduire que B est inversible puis exprimer son inverse B^{-1}.

Exercice $\boxed{3}$ $\bullet\Theta^{\mathrm{C}\sharp}$ On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et on pose $Q = \frac{1}{2}P$.

1. Calculer Q^2 puis Q^3.
2. Vérifier que $F(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ est un polynôme annulateur de Q.
3. Facoriser le plus possible $F(X)$.
4. En déduire que P est inversible puis exprimer son inverse P^{-1}.

Exercice $\boxed{4}$ $\bullet\Theta^{\mathrm{C}\sharp}$ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et on pose $N = \frac{1}{2}M$.

1. Ecrire explicitement les matrices $N - I_3$, $N - 2I_3$ et $N - 3I_3$.
2. Vérifier que $(N - I_3)(N - 2I_3)(N - 3I_3) = O_3$ (matrice nulle carrée d'ordre 3)
3. Proposer un polynôme annulateur de N sous forme développée.
4. En déduire que M est inversible puis exprimer son inverse M^{-1}.

Exercice $\boxed{5}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & -11 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on pose $B = \frac{1}{2}A$.

1. Calculer explicitement la matrice $B^2 + B - 6I_3$.
2. Vérifier que $B^3 + B^2 - 6B = O_3$ (matrice nulle carrée d'ordre 3)
3. En déduire que B n'est pas inversible. On pourra raisonner par l'absurde.
4. La matrice A est-elle inversible ? Justifier.

Exercice $\boxed{6}$ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -5 & 9 & -5 \\ -8 & 12 & -8 \end{pmatrix}$ et on pose $T = \frac{1}{2}C$.

1. Calculer explicitement les matrices T^2 puis T^3.

2. Vérifier que $T^3 + T^2 = 6T$
3. En déduire que T n'est pas inversible. On pourra raisonner par l'absurde.
4. La matrice C est-elle inversible ? Justifier.

Exercice $\boxed{7}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On pose $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $AU = 2U$. Que peut-on alors conclure ?
2. Démontrer que V est un vecteur propre de A.
3. Justifier que -1 est valeur propre de A (on pourra utiliser W).

Exercice $\boxed{8}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On pose $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $AW = -W$. Que peut-on alors conclure ?
2. Démontrer que 2 est une valeur propre de A.
3. Justifier que V est un vecteur propre de A.

Exercice $\boxed{9}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner un polynôme annulateur de A. Vérifier que -1 et 3 sont des racines de ce polynômes.
2. On introduit les matrices $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Vérifier l'égalité $A = PDP^{-1}$.
   (c) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
   $$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$
3. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression explicite de A^n.
4. Finalement, quelles sont les valeurs propres de A ? On donnera un vecteur propre associé à chacune d'elles.

Exercice $\boxed{10}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Vérifier que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A
   (b) Préciser les valeurs propres associées aux vecteurs propres X, Y et Z. Que remarquez-vous ?
2. Démontrer que, en toute généralité, si V est un vecteur propre associé à λ, valeur propre de A, alors toute colonne de la forme $\alpha \cdot V$ est aussi un vecteur propre associé à λ.
3. Etablir que, si λ est valeur propre de A, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est valeur propre de A^k.

On pourrait généraliser les deux derniers résultats à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice $\boxed{11}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On considère la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On pose $P(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3$. Vérifier que P est un polynôme annulateur de A.
2. Proposer une forme factorisée de $P(X)$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
3. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.
   Résoudre les (systèmes d') équations $AX = \lambda_1 X$, $AX = \lambda_2 X$ et $AX = \lambda_3 X$ (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$).
4. Finalement, quelles sont les valeurs propres de A ?

Exercice $\boxed{12}$ On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner un polynôme annulateur de B.
2. En déduire que B n'admet pas de valeur propre.
3. Démontrer que B est inversible.

Exercice $\boxed{13}$ On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner un polynôme annulateur de C.
2. En déduire que C n'admet pas de valeur propre.
3. Justifier que C est inversible.

Exercice $\boxed{14}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A n'a qu'une unique valeur propre.
3. Démontrer que A n'est pas diagonalisable (on pourra raisonner par l'absurde)
4. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice $\boxed{15}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A n'a qu'une unique valeur propre.
3. Démontrer que A n'est pas diagonalisable (on pourra raisonner par l'absurde)
4. La matrice A est-elle inversible ?

Exercice $\boxed{16}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $M^2 - 3M + 2I_3$ et écrire $M - 3I_3$ explicitement.
2. Vérifier que $(M^2 - 3M + 2I_3)(M - 3I_3) = O_3$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
3. Justifier que les réels 1, 2 et 3 sont valeurs propres de M.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible.
5. Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont (dans cet ordre) 1, 2 et 3.
   Vérifier l'égalité $MP = PD$. En déduire que M est diagonalisable.

6. Etablir, en raisonnant par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $M^n = PD^nP^{-1}$.
7. Expliciter M^n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice $\boxed{\textbf{17}}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 + 4$ est annulateur de A et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres respectivement associées.
3. On note P la matrice dont lestrois colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2 et V_3.
   (a) Calculer $P^3 - 3P^2 + 5P - 3I_3$ et en déduire que P est inversible.
   (b) Vérifier l'égalité $AP = PD$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. En déduire que A est diagonalisable puis déterminer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice $\boxed{\textbf{18}}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.
2. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$ $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$.
   Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $A^n = a_nA + b_nI$.
3. (a) On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = 2a_n + b_n$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique et en déduire, une expression explicite de u_n en fonction de n.
   (b) On introduit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $v_n = a_n - b_n$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique et en déduire une expression explicite de v_n en fonction de n.
4. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. En calculant de deux manières $u_n + v_n$ déterminer une expression de a_n en fonction de n.
5. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de b_n.
6. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. A l'aide de ce qui précède expliciter les coefficients de A^n.

Exercice $\boxed{\textbf{19}}$ On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

On introduit, pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice X_n de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont, dans cet ordre, u_n, v_n et w_n.

1. Déterminer une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n utilisant A, n et X_0 (on justifiera le résultat par une récurrence).
3. Vérifier que $P(X) = (X-1)(X+1)(X-3)$ est annulateur de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.
4. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
5. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de A^n.
6. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de u_n, v_n et w_n.