.

Suites de VAR

Exercice $\boxed{1}$ Inégalité de Markov Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Markov (rappelée ci-dessous) dans les cas de variables aléatoires discrètes (infinies) ou encore à densité, soit encore d'établir que, si X est une VAR positive définie sur un espace de probabilité $(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ \mathbb{P})$ alors :

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

1. *Cas où X est discrète*

   Dans cette question, on suppose que $X(\Omega) = \{x_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$ et que X admet une espérance. On considère $a > 0$ fixé et on note $A = [X \geq a]$. On introduit :

   $$I(a) = \{i \in \mathbb{N}\ ;\ x_i < a\} \quad \text{et} \quad J(a) = \{j \in \mathbb{N}\ ;\ x_j \geq a\}$$

   (a) Déterminer les ensembles $I(A) \cup J(A)$ et $I(A) \cap J(A)$.

   (b) Etablir que $\mathbb{P}[A] = \displaystyle\sum_{j \in J(A)} \mathbb{P}[X = x_j]$

   (c) Simplifier au mieux $\displaystyle\sum_{i \in I(A)} x_i \mathbb{P}[X = x_i] \ + \sum_{j \in J(A)} x_j \mathbb{P}[X = x_j]$

   (d) Justifier que l'on a $\sum_{j \in J(A)} x_j \mathbb{P}[X = x_j] \ \geq a\mathbb{P}[X \geq a]$

   (e) En déduire que $\mathbb{E}[X] \geq a\mathbb{P}[A]$ et conclure.

2. *Cas où X est à densité*

   Dans cette question, on suppose que X une variable aléatoire positive à densité. On désignera pas f une densité de X. Comme X est positive, on peut supposer f est nulle sur $]-\infty, 0[$. On considère que X admet une espérance.
   Soit a un réel strictement positif.

   (a) Justifier, pour tout x de $[a, +\infty[$, l'inégalité : $a \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x t f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire l'inégalité : $a\mathbb{P}[X \geq a] \leq \displaystyle\int_a^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (c) Etablir que $\mathbb{E}[X] \geq \displaystyle\int_a^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t$

   (d) Peut-on aussi conclure que $\mathbb{P}[X > a] \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$?

Exercice $\boxed{2}$ Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff est donnée pour une variable aléatoire X définie sur un espace de probabilités $(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ \mathbb{P})$, admet une espérance ainsi qu'une variance :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On pourra supposer connue l'inégalité de Markov dans cet exercice.

1. On pose $Y = |X - \mathbb{E}[X]|^2$. Vérifier que Y est une variable aléatoire positive qui possède une espérance que l'on décrira le plus simplement possible.
2. Etablir que, pour tout $\varepsilon > 0$, les événements $[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon]$ et $\left[Y \geq \varepsilon^2\right]$ sont équiprobables.
3. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\right] \leq \dfrac{\mathbb{E}[Y]}{\varepsilon^2}$
4. Conclure.

Exercice $\boxed{3}$ On considère une pièce biaisée dont la probabilité de faire *pile* est $p \in]0;1[$. On effectue un suite de lancers supposés mutuellement indépendants et on note X_k la VAR valant 1 si le k-ième lancer donne *pile* et 0 sinon.

1. Pour $i \neq j$ éléments de $\mathbb{N}^*$, pourquoi peut-on considérer que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes ?
2. On note Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer les lois de Z_1, Z_2 et Z_3.
   (b) De façon générale, décrire l'ensemble $Z_n(\Omega)$ des valeurs prises par Z_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Pour $n \geq 3$ donné, on considère un événement de type E comme un événement de la forme :
   $$[X_1 = b_1] \cap [X_2 = b_2] \cap \cdots \cap [X_n = b_n]$$
   où les nombres b_1 ; ... ; b_n sont chacun dans $\{0;1\}$. Combien d'événements de type E distincts peut-on former ?
   (d) On considère un événement de type E dans lequel exactement k valeurs parmi $b_1; \ldots; b_n$ valent 1 (avec $k \leq n$). Combien de tels événements distincts peut-on former ?
   Justifier que ces événements ont tous même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.
   (e) Décrire l'événement $[Z_n = k]$ à l'aide d'événements de type E et en déduire $\mathbb{P}[Z_n = k]$ en fonction de n et de k.
3. En déduire la loi de Z_n (c'est une loi usuelle).
4. On pose $M_n = \dfrac{1}{n} Z_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les valeurs de $\mathbb{E}[M_n]$ ainsi que $\mathbb{V}[M_n]$.

Exercice $\boxed{4}$ 1. Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 2. On définit $Z = X^2$ et $Y = 5 - 3X$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y ainsi que l'espérance de Z.
   (b) Déterminer la variance dce Y.
   (c) Calculer $cov(X;Y)$
2. On considère de plus une variable aléatoire T telle que $cov(X;T) = -2$
   (a) Déterminer $cov(Y;T)$. En déduire $cov(5T - 2Y; X - 2T)$.
   (b) On note $v = \mathbb{V}[T]$. Exprimer $cov(X + T; Y - T)$ en fonction de v.

Exercice $\boxed{5}$ 1. Soit U une variable aléatoire d'espérance -1 et de variance 3. On définit $V = U^2$ et $W = 4 - 5U$.
   (a) Déterminer l'espérance de V ainsi que l'espérance de W.
   (b) Déterminer la variance dce W.
   (c) Calculer $cov(U;W)$
2. On considère de plus une variable aléatoire T telle que $cov(U;T) = 5$
   (a) Déterminer $cov(W;T)$. En déduire $cov(5T - 2W; U - 2T)$.
   (b) On note $t = \mathbb{V}[T]$. Exprimer $cov(U + T; W - T)$ en fonction de t.

Exercice $\boxed{6}$ Soient X, Y et T trois variables aléatoires avec X et Y indépendantes.
On suppose que l'on a : $V(Y) = 5$, $\text{Cov}(Y,T) = 4$ et $\text{Cov}(T,X) = -1$. Calculer $\text{Cov}(5X + 2Y, 3T - 7Y)$.

Exercice $\boxed{7}$ Soient X, Y et T trois variables aléatoires avec X et Y indépendantes.
On suppose que l'on a : $V(Y) = 4$, $\text{Cov}(Y,T) = 3$ et $\text{Cov}(T,X) = 2$. Calculer $\text{Cov}(2X - 3Y, 2T - 5Y)$.

Exercice $\boxed{8}$ Soit n un entier strictement positif. Soient X_n, Y_n et Z_n trois variables aléatoires qui suivent toutes la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$. On suppose que l'on a $X_n + Y_n + Z_n = n$.

1. Déterminer la valeur de $V(X_n + Y_n + Z_n)$ explicitement.
2. Démontrer que l'on a également $V(X_n + Y_n + Z_n) = 2\left(n + \text{Cov}(X_n, Y_n) + \text{Cov}(X_n, Z_n) + \text{Cov}(Y_n, T_n)\right)$
3. Déterminer les valeurs de $\text{Cov}(X_n, Y_n)$, $\text{Cov}(X_n, Z_n)$ et $\text{Cov}(Y_n, T_n)$

4. Etablir que l'on a $\text{Cov}(X_n; Y_n) = -\mathbb{V}[X_n] - \text{Cov}(X_n; Z_n)$ et en déduire la valeur de $\text{Cov}(X_n; Y_n) + \text{Cov}(X_n; Z_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Démontrer que $\text{Cov}(X_n, Y_n) = \text{Cov}(X_n, Z_n) = \text{Cov}(Y_n, T_n)$.
6. En déduire la valeur commune de $\text{Cov}(X_n, Y_n)$, $\text{Cov}(X_n, Z_n)$ et $\text{Cov}(Y_n, T_n)$

Exercice $\boxed{9}$ **D'après Concours ECT** Un opérateur téléphonique propose 3 forfaits : le coût du forfait n°i coûte $10i$ euros par mois ($i \leq 3$)

Un groupe de n ($n \geq 2$) clients se rend dans une boutique de cet opérateur et chacun achète un de ces trois forfaits au hasard, avec équiprobabilité et sans être influencé par le choix des autres clients.

On note X_i égale au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait n°i les variables aléatoires, ainsi que H la somme globale mensuelle en euros versée par ces n clients à l'opérateur.

1. (a) Justifier que X_1 suit une loi usuelle que l'on détaillera, en rappelant $X_1(\Omega)$ et l'expression de $\mathbb{P}[X_1 = k]$ pour tout entier $k \in X_1(\Omega)$ et en donner les valeurs d'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et de variance $\mathbb{V}(X_1)$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.
2. Justifier que $X_1 + X_2 = n - X_3$ et en déduire la variance de $X_1 + X_2$.
3. En déduire :
$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}.$$
   Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Exprimer H en fonction des variables X_1 X_2 et X_3 puis montrer que : $E(H) = 20n$.

Ne remarqueriez-vous pas une certaine similarité avec l'exercice précédant ?

Exercice $\boxed{10}$ Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On prélève une boule au hasard (équiprobable) et on relève sa couleur. On replace alors cette boule dans l'urne, ainsi qu'un autre boule de cette même couleur. Cette épreuve est répétée p fois, avec $p \geq 3$ entier naturel donné.

On définit enfin, pour chaque $i \leq p$ une variable aléatoire X_i de Bernoulli, associée au succès *une boule blanche est obtenue au* i^{eme} *tirage* et on notera $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Déterminer complètement la loi du couple $(X_1; X_2)$ et en déduire la loi (marginale) de X_2.
2. En déduire la loi de probabilité de Z_2. On donnera $Z_p(\Omega)$
3. On se donne $2 \leq p \leq n-1$ un entier.
   (a) Justifier que $Z_p(\Omega) = [\![0 \,;\, p]\!]$.
   (b) Interpréter en contexte l'événement $[Z_p = k]$ pour $0 \leq k \leq p$ entier.
   On pourra représenter schématiquement l'urne après p étapes
   (c) Démontrer que, pour k entier naturel vérifiant $k \leq p$ la valeur de $\mathbb{P}_{[Z_p=k]}[X_{p+1} = 1] = \dfrac{k+1}{p+2}$
   (d) Etablir que :
$$\mathbb{P}[X_{p+1} = 1] = \frac{1 + \mathbb{E}[Z_p]}{2+p}$$
   (*Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales*)
   (e) Justifier que $\mathbb{E}[Z_p] = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}[X_i = 1]$
4. Démonter que $\forall p \geq 3$ on a $\mathbb{E}[Z_p] = \dfrac{p}{2}$. On pourra raisonner par récurrence.
5. Etablir enfin que $\forall p \geq 3 \quad \mathbb{P}[X_p = 1] = \mathbb{P}[X_p = 0] = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat semble-t-il intuitif ?

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes suivant une même loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0;1[$.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de $\mathbb{E}[X_i]$ et $\mathbb{V}[X_i]$ où $i \leq n$.
2. On pose ensuite $Y_0 = 0$ (variable certaine) puis on définit une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par récurrence :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = \frac{1}{2}Y_{n-1} + X_n$$

   (a) Etablir que, pour tout $n \geq 1$ on a :

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} X_{n-i}$$

   (b) Déterminer, en justifiant soigneusement, l'espérance et la variance de Y_n, pour $n \geq 1$.
   (c) Calculer enfin $Cov(Y_n; Y_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Peut-on trouver i et j sont deux entiers naturels non nuls,tels que Y_i et Y_j soient indépendantes ?
   (e) **Python** : Proposer un script permettant de générer une réalisation de la variable aléatoire Y_n lorsque n est fourni en entrée.

Exercice $\boxed{\textbf{12}}$ On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilités $(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ \mathbb{P})$.

On suppose que chacune de ces variables admet une espérance et une variance et on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\mathbb{V}[S_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}[X_k] \quad + \ 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(X_i; X_j)$

Indication : On pourra raisonner par récurrence.

Exercice $\boxed{\textbf{13}}$ Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *face* est p ($p \in]0, 1[$). On pose $q = 1 - p$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on définit :

- La variable aléatoire Z_i qui vaut 1 si le $(i-1)$-ième lancer donne *face* et le i-ième lancer donne *pile* et 0 sinon.
- Les événements F_i : "le i-ème lancer donne face"
- Les événements P_i : "le i-ème lancer donne pile".

1. Déterminer, pour tout i de $[\![2, n]\!]$, la loi de Z_i.
2. Déterminer, pour tout i de $[\![2, n]\!]$, l'espérance et la variance de Z_i.
3. Soient i et j deux entiers tels que $2 \leq i < j \leq n$.
   (a) Montrer, à l'aide de la formule de Huygens, l'égalité :

$$\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = \mathbb{P}\left([Z_i = 1] \cap [Z_j = 1]\right) - \mathbb{P}[Z_i = 1]\mathbb{P}[Z_j = 1].$$

   (b) En déduire $\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)$ dans les cas $j = i + 1$ et $j > i + 1$.
   (c) Pourquoi le résultat obtenu dans le cas $j > i + 1$ n'est pas surprenant ?
4. On définit la variable aléatoire Z, par $Z = \sum_{k=2}^{n} Z_k$.
   (a) Que représente la variable aléatoire Z ?
   (b) Déterminer l'espérance de Z.
   (c) Déterminer la variance de Z dans le cas $n = 2$.
   (d) A l'aide de l'exercice $\boxed{\textbf{12}}$ déterminer la variance de Z dans le général.