Interrogation $I_5(A)$

Exercice I : Cours [format Oral]

Les notions attendues sont Explicitement au programme officiel ECT-1 ou ECT-2 (et issues du BO)

1. Equation de la tangente en un point *(dans le cadre de l'étude de fonctions réelles d'une variable réelle)*
2. Variables Aléatoires Réelles : définitions d'une VAR centrée, d'une VAR centrée-réduite
3. Formule des probabilités totales

Exercice II : Inspiré du cours (et recyclable)

Les résultats établis dans cette section pourront être utilisés dans les autres problèmes sans qu'il ait été nécessaire de les traiter.

1. Soit $x \in]-1;1[$ et n un entier naturel.
   (a) Montrer que $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; 1-x^{n+1}$
   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit sur $]-1;1[$ une fonction f_n par : $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$
   (a) Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$
   (b) Calculer $f_n'(x)$ pour $x \in]-1;1[$.
   (c) Calculer $f_n''(x)$ pour $x \in]-1;1[$.
3. Etablir que, si $x \in]-1;1[$ alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \;=\; \frac{1}{(1-x)^2}$
4. Montrer de façon analogue que, si $x \in]-1;1[$ alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} \;=\; \frac{2}{(1-x)^3}$
5. En déduire une expression explicite simpplifiée de la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^2x^k$ après en avoir établi l'existence dans $\mathbb{R}$.

Exercice III : situations

Pour chacune des situations suivantes, déterminer la loi suivie par la variable aléatoire définie en justifiant soigneusement

1. On considère une urne contenant une boule noire et b boules blanches, toutes indiscernables, avec $b \geq 2$
   Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
   Si X désigne la variable aléatoire donnant le nombre total de tirages effectués par le joueur A, quelle est la loi de X ?
2. On considère une urne contenant une boule noire et b boules blanches, toutes indiscernables, avec $b \geq 2$
   Un joueur B effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
   Si Y désigne la variable aléatoire donnant le nombre total de tirages effectués par le joueur B, quelle est la loi de Y ?
3. On considère une urne contenant une boule noire et 2 boules blanches, toutes indiscernables
   Un joueur C effectue b tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne.
   Si Z désigne la variable aléatoire donnant le nombre total de fois où la boule noire a été obtenue par le joueur C, quelle est la loi de Z ?