Mathématiques Lycée Turgot
M^r HEMON **Concours Blanc** C_2 ECT-2 2025 / 2026

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Exercice I : En rouge et noir

On dispose de trois urnes numérotées 1, 2 et 3 qui contiennent chacune deux boules :
- L'urne numéro 1 contient deux boules noires
- L'urne numéro 2 contient une boules noire et une boule rouge
- L'urne numéro 1 contient deux boules rouges

L'expérience consiste à choisir une fois pour toutes une urne au hasard (de façon équiprobable) puis à y effectuer une succession de tirages d'une boule *avec remise* jusqu'à l'éventuelle obtention d'une boule noire. On note $(\Omega\,;\,\mathcal{A}\,;\,\mathbb{P})$ un espace de probabilités associé à cette expérience.
Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note U_k l'événèment "*L'urne numéro k a été choisie*".
On considère ensuite la variable aléatoire T définie sur $(\Omega\,;\,\mathcal{A}\,;\,\mathbb{P})$ égale au rang du tirage où apparaît pour la première fois une boule noire. On attribue à T la valeur 0 dans le cas où l'on n'obtiendrait jamais de boule noire au cours de cette expérience.

1. (a) Déterminer l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T.
   (b) Justifier les résultats suivants :
   $$\mathbb{P}_{U_1}([T=1]) = 1 \quad ; \quad \mathbb{P}_{U_2}([T=1]) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}_{U_3}([T=1]) = 0$$
   (c) En déduire que $\mathbb{P}([T=1]) = \frac{1}{2}$
2. (a) Justifier que, pour tout entier $j \geq 2$ on a $\mathbb{P}_{U_1}([T=j]) = \mathbb{P}_{U_3}([T=j]) = 0$
   (b) Calculer la valeur de $\mathbb{P}_{U_2}([T=j])$ pour $j \geq 2$ entier.
   (c) Montrer que, pour tout entier $j \geq 2$ on a $\mathbb{P}([T=j]) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathbb{P}([T=0])$ puis proposer une interprétation de ce dernier résultat.
4. (a) Etablir que T admet une espérance que l'on note $\mathbb{E}(T)$.
   (b) Calculer la valeur de $\mathbb{E}(T)$.
5. **Python**
   (a) Recopier puis compléter le script suivant pour qu'il réalise l'expérience sachant que l'urne U_2 a été choisie :

```
from math import*
import numpy as np
import numpy.random as rd
T=......................
while ..................
        T=T+1
print(..................)
```

   (b) Proposer un script Python de simulation de l'expérience modélisée par $(\Omega\,;\,\mathcal{A}\,;\,\mathbb{P})$ au moyen d'une fonction `simulu()`

(c) On suppose que l'appel de la commande `simulu()` génère effectivement une réalisation de la variable T décrite dans ce problème.
Proposer un script Python qui génère 1000 réalisations de T indépendantes entre elles et qui calcule la moyenne observée sur ces 1000 réalisations.

(d) De quelle valeur obtenue au cours de l'étude de T devrait être proche la moyenne observée calculée par Python lors de l'exécution du script qui précède ?

Exercice II : Matrices en deux-deux

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ainsi que O_2 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Soient $(x; y; a; b) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $aA + bI = xA + yI$. Etablir qu'on alors $x = a$ et $y = b$.
   (b) Calculer A^2 puis exprimer A^2 en fonction de A et de I
   (c) **Python** Proposer un script Python qui prend un entier n en entrée puis renvoie A^n.
   (d) Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple $(u_n; v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_nA + v_nI$.
   On vérifiera que les réels u_n et v_n satisfont les relations $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le u_n et v_n sont positifs.
   (b) Etablir que la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$
4. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on pose $d(M) = ad - bc$.
   (a) Démontrer que, pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a $d(MN) = d(M) \times d(N)$
   (b) Etablir que, pour tout entier naturel n on a $d(M^n) = d(M)^n$.
   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible. Justifier que $d(M) \neq 0$ puis établir $d(M^{-1}) = \dfrac{1}{d(M)}$.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ entier on a $u_{n-1}u_{n+1} - {u_n}^2 = (-1)^n$

Exercice III : Fonctions, intégration

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

et on considèrera, en particulier, que $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 1$ et $x \neq -1$ on ait :

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}$$

2. On considère trois fonctions f, g et h définies sur $]-1; 1[$ par, respectivement :

$$f(x) = \ln(1 - x) \quad ; \quad g(x) = \ln(1 + x) \quad ; \quad h(x) = \ln(1 - x^2)$$

   (a) Justifier que f, g et h sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1; 1[$
   (b) Expliciter les dérivées de f, de g et de h sur $]-1; 1[$
   (c) Etablir que f et g sont monotones sur $]-1; 1[$

(d) Dresser le tableau des variations complet (avec limites en -1 et en 1) de h sur $]-1;1[$.

(e) Etudier la convexité de hg sur $]-1;1[$.

3. (a) Vérifier par le calcul que $u_0 = \dfrac{\ln(3)}{2}$ et $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

   (b) En déduire les valeurs de u_2 et de u_3.

4. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5. (a) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$

   (b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$ réel.

   (b) Etablir que, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on a :

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

   (c) Démonter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}\,\mathrm{d}x \leq 2u_{n+1}$$

   (d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge vers un réel noté S.

   (e) Déterminer la valeur du réel S explicitement.

   Indication : On pourra chercher des réels α, β et γ vérifiant :

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{1+x}$$

Exercice IV : Un couple

On donne le script Python de simulation suivant :

```
from math import*
import numpy as np
import numpy.random as rd

T = np.zeros(3)
for k in range(3):
    p=rd.randint(0,3)
    T[p]=T[p]+1
X=T[0]

Y=0
for k in range(3):
    if T[k]==0:
        Y=Y+1
print("couple (X;Y)=",[X,Y])
```

A l'issue de l'exécution de ce script, on obtient une réalisation du couple $(X;Y)$ de variables aléatoires régénérées sur un espace de probabilités $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. En voici un exemple d'appel :

```
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
couple (X;Y)= [2.0, 1]
>>> T
array([2., 1., 0.])
```

Le but du problème est d'étudier ce couple et de décrire une expérience pouvant être simulée par ce programme.
On rappelle que la commande $\texttt{rd.randint}(0, \texttt{n}+1)$ génère une valeur aléatoire de loi uniforme entière sur l'ensemble $[\![0;n]\!]$ et que ses appels successifs pourront être considérés indépendants les uns des autres.

1. Justifier que $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$. Que vaut $Y(\Omega)$?
2. Déterminer la loi marginale de X obtenue par ce programme.
3. Calculer les valeurs d'espérance $\mathbb{E}[X]$ et de variance $\mathbb{V}[X]$ associées.
4. Déterminer soigneusement la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 0]$ réalisé.
5. Décrire la loi conjointe du couple $(X;Y)$
6. En déduire la loi marginale de Y.
7. Calculer la valeur de covariance $cov(X;Y)$ de X et de Y.
8. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
9. On considère un tiroir à trois compartiments de même taille et on imagine qu'on place aléatoirement trois jetons successivement et indépendamment dans ces compartiments.
   Décrire, dans ce contexte, des rôles possibles pour X et Y.