

Interrogation I₇

Exercice I : Cours [format Oral]

Les notions attendues sont Explicitement au programme officiel ECT-1 ou ECT-2 (et issues du BO)

1. Couples de VAR finies : espérance d'une somme, espérance d'un produit (de deux VAR)
2. Variable aléatoire discrète infinie : espérance (définition et condition d'existence)

Problème

Partie I :

On considère la matrice A carrée d'ordre 2 définie comme $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est inversible puis donner la matrice inverse A^{-1}
2. Donner, en justifiant, un polynôme annulateur de A
3. On donne $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer AU .
4. On donne $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer AV .
5. Vérifier que 2 et -3 sont bien valeurs propres de la matrice A .
6. En déduire que A est diagonalisable et qu'une matrice diagonale associée peut être la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
7. Démontrer par récurrence que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = P D^n P^{-1}$$
où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
8. Finalement, explicitez la matrice A^n en fonction de l'entier $n \geq 1$

Partie II :

On considère à présent une matrice B carrée d'ordre 3 vérifiant $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$

1. On donne la polynôme $Q(X) = X^3 + 3X^2 - 4X - 12$.
 - (a) Vérifier que -2 est racine de $Q(X)$.
 - (b) En déduire une forme factorisée de $Q(X)$
 - (c) Calculer $Q(B)$.
 - (d) La matrice B est-elle inversible ? Justifier
2. Démontrer que -2 , -3 et 2 sont les seules valeurs propres possibles de la matrice B
3. Vérifier que -2 , -3 et 2 sont effectivement les seules valeurs propres de B
4. Etablir que B est diagonalisable