

20/11/2015

Courge  
CB n°3

Alcée Zuyet  
ECT-2

## Exercice I

### Partie A

1°) L'échance indique que, si le mobile est en  $i-1$  à l'instant  $n$ , alors à l'instant  $n+1$  il sera en  $i$  avec probabilité  $\frac{i}{i+1}$  ou qui ne reçoit

$$\mathbb{P}[A_n = i-1 | A_{n+1} = i] = \frac{i}{i+1} \quad (i \in \mathbb{N}^*)$$

en probabilité  $n = i-1$  alors :

$$\mathbb{P}[A_i = i] = \frac{i}{i+1}$$

$$\mathbb{P}[A_{i-1} = i-1]$$

Comme le mobile, depuis la position  $i-1$ , ne peut (à l'instant suivant) qu'être en  $i$  ou en  $0$  on a alors bien :

$$\mathbb{P}[A_{i-1} = i-1] \mathbb{P}[A_i = 0] = \frac{i}{i+1}$$

et ainsi on retrouve  $\mathbb{P}[A_{i-1} = i-1] \mathbb{P}[A_i = 0] = \frac{i}{i+1}$

2°) On a donc  $[U=1]$  lorsque  $[A_1 = 0]$  par l'exemple. Je vais constater la convergence de l'événement.

$$\text{Ainsi } [U=k] = [A_1=1][A_2=2] \dots [A_{k-1}=k-1][A_k=0]$$

3°) On a ainsi, par la formule des probabilités composées, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}[U=k] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{k-1} [A_i = i] \cap [A_k = 0]\right]$$

$$= \mathbb{P}[A_1=1] \mathbb{P}[A_2=1] \dots \mathbb{P}[A_{k-1}=k-1] \mathbb{P}[A_k=0]$$

Or,  $\bigcap_{i=1}^k [A_i = i] = [A_1=1][A_2=2] \dots$  par inclusion de ces événements, selon le principe de l'expérience

$$\text{on a : } \mathbb{P}[U=k] = \mathbb{P}[A_1=1] \mathbb{P}[A_2=1] \dots \mathbb{P}[A_{k-1}=k-1] \mathbb{P}[A_k=0]$$

Mais pour chaque  $i \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\mathbb{P}[A_{i-1} = i-1] \mathbb{P}[A_i = i] = \frac{i}{i+1}$$

$$\text{or } \mathbb{P}[A_{k-1} = k-1] \mathbb{P}[A_k = 0] = \frac{1}{k+1}$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}[U=k] = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

On pourrait aussi procéder par récurrence.

4°) on peut montrer la convergence et calculer la

$$\text{valeur de } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\text{or, pour } N \in \mathbb{N}^* \text{ on a } \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

ayant bien  $\frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+1} = \frac{k(k+1)}{k(k+1)}$

(pour  $k \in \mathbb{N}^*$ )

et il vient, par télescoping, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

D'où  $\sum_{k=1}^{+\infty} P[U=k]$  converge et vaut 1

Si par incompatibilités,  $\sum_{k=1}^{+\infty} P[U=k] = P[U \in \mathbb{N}^*]$

d'où comme  $U(X) = N$  par construction, on a:

$$P[U=0] = P[U \in \mathbb{N}^*] = 1 - P[U \in \mathbb{N}^*] = 1 - 1 = 0$$

Il est improbable que le mobile ne revienne jamais en 0

6° Reprenons le calcul effectué en 4°:

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Il se déduit  $P[U \leq n] = \sum_{k=1}^n P[U=k] = 1 - \frac{1}{n+1}$

et ainsi  $P[U > n] = 1 - (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

(en choisissant de vérifier le cas  $N = n$ )

Partie B : Simulations

voir Annexe pour 1924

3° a) 10000 réalisations obtenues et fréquences:

Dressons un tableau comparatif de probabilités et fréquences:

| k        | 1             | 2             | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              |
|----------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P[U=k]$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{56}$ | $\frac{1}{72}$ |

hauteur  $\frac{1}{10000}$  500 1800 900 500 200 100 50 20 10

fréquences: 0,5 0,18 0,09 0,05 0,02 0,01 0,005 0,002 0,001

(valeurs de fréquences obtenues par lecture graphique)

Annexes unaires: valeur lue  $\frac{1}{10000}$

ou  $\frac{1}{6} \approx 0,17$ ;  $\frac{1}{12} \approx 0,08$ ;  $\frac{1}{20} \approx 0,05$ ;  $\frac{1}{30} \approx 0,03$

les lectures graphiques ne sont en accord avec la théorie

b) on a  $P[U=9] = \frac{1}{90} \approx 0,01$

mais  $P[U > 8] = \frac{1}{9} \approx 0,11$  d'après A6°

La dernière barre représente le cumul des valeurs

réalisées à partir de  $k=9$

On a bien  $P[U > 8] = \frac{1}{9} > \frac{1}{72} = P[U=8]$

Ce qui expliquerait cette observation.

c) Approximativement:

$$\frac{1}{10000} (500 + 3600 + 2700 + 2000 + 1000 + 500) \approx 0,001$$

$$\approx \frac{1}{10} (5 + 36 + 27 + 20 + 10) \approx 2$$

Empiriquement, on pourrait lire une moyenne de 2

6° On lit la fréquence d'observations de valeurs

obtenues pour  $U$  inférieures ou égales à 10

sur 10 000 réalisations: 91,07%

5% un nombre à 5 chiffres au moins est une valeur  $N \geq 10000$ . Soit  $X_i \hookrightarrow B(p)$  où

$$p = P[U \geq 10000] = P[U > 9999] = \frac{1}{10^4 \times 9999}$$

On réalise 10 000 épreuves indépendantes et identiques pour lesquelles on note  $M$  le nombre de succès obtenus  $M = X_1 + \dots + X_{10000}$ , le maximum la demande  $[M \geq 1]$

On calcule  $P[M \geq 1] = 1 - P[M = 0]$  en notant

observant que  $M \hookrightarrow B(10000; p)$ ;  $N = 10000$

$$\text{Soit } P[M \geq 1] = 1 - \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N = 1 - (1-p)^N$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{99990000}\right)^{10000}$$

La réalisation de cet élément semble peu crédible (en effet, une calculatrice donnant  $P[N \geq 1] \approx 10^{-4}$ )

Soit une chance sur 1000, correspondant en fait à  $E[M] = NP = \frac{1}{9999} \approx 10^{-4}$

## partie C

1°  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  puisque nulle et positive ainsi  $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$f$  est inverse d'un polynôme avec  $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$  sur  $\mathbb{R}^+$  donc bien défini, et

et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .  
Pour  $A > 0$  donne en  $\int_0^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_0^A (x+1)^{-2} dx$

$$= \left[ \frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right]_0^A = -\frac{1}{A+1} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{A+1}$$

et  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A+1} = 0 \Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = 1$

Comme  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}^*$  on a  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0$  (convergence acquise) et ainsi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge par la relation de Charles}$$

$$\text{avec } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Donc  $f$  est bien une densité de probabilité.

2° Sur  $\mathbb{R}^*$ ;  $T$  a une densité nulle d'où:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad P[T \leq x] = 0$$

Si  $x \geq 0$  alors:

$$F(x) = P[T \leq x] = P[T < 0] + P[0 \leq T \leq x]$$

$$= 0 + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$= \left[ -\frac{1}{t+1} \right]_0^x = -\frac{1}{x+1} + 1 = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Or } 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

et ainsi:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3° Sur  $\mathbb{R}^+$  on a  $F$  quotient d'affines avec le dénominateur qui ne s'annule pas donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f' = f$  sur  $\mathbb{R}^+$  avec  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$  donc, par le principe de Lagrange

$F_x$  est strictement croissante et comme  $F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$  (règle des menues)

le théorème de bijection permet d'obtenir que  $F$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0, 1[$

4/ On a  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall t \in [0, 1[ \quad F(x) = t$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = t$$

$$\Leftrightarrow t - 1 = -\frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-t} = x+1 \quad (t \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-t} - 1 = F^{-1}(t)$$

et par conséquent  $F(x) = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-t} - 1 = F^{-1}(t)$

On déduit donc  $\forall t \in [0, 1[ \quad F^{-1}(t) = \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}$

5/ D'après la densité de  $T$  on a  $T(S_1) = \mathbb{R}^+$

donc  $f_{\text{loca}}(T) = N$  et aussi  $L(T) + 1 = N$

par ailleurs  $[N = n] = [L(T) + 1 = n]$

$= [L(T) = n-1]$

et, par définition donnée dans l'énoncé :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad L(x) \leq x$  et  $x < L(x) + 1$

donc  $L(x) \leq x$  et  $x-1 < L(x)$

Soit, pour  $t \in \mathbb{R}^+$  quelconque :  $t-1 < L(t) \leq t$

Ainsi :  $[L(T) \leq T < L(T) + 1]$  est toujours réalisé

et  $[T-1 \leq L(T)]$  est toujours réalisé

car  $[L(T) = n-1] = [n-1 \leq T < n]$

6/ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on a donc :

$$\mathbb{P}[N=n] = \mathbb{P}[n-1 \leq T < n]$$

$$= \mathbb{P}[n-1 \leq T < n] \quad \text{car } T \text{ est à densité 1}$$

$$= F(n) - F(n-1) \quad \text{comme } T \text{ est à densité 1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \quad \text{puisque } 0 \leq n-1 < n$$

$$= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

7/ Nous avons  $F^{-1}(t) = \frac{t}{1-t}$  avec  $t \in [0, 1[$

posons  $U \hookrightarrow U \in [0, 1[$  et  $T = F^{-1}(U)$

on a  $\mathbb{P}[T \leq x] = \mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq x]$

$= \mathbb{P}[U \leq F(x)] = F(x)$

car  $F$  est à valeurs dans  $[0, 1[$  et  $F_U : x \mapsto x$  si  $x \in [0, 1[$

Donc  $T$  est bien la v.a. définie dans l'énoncé.

on pose :

$U = \text{rd. random}()$

$T = U / (1-U)$

$N = f_{\text{loca}}(T) + 1$

Peut montrer  $N$  en Python.

En fait, il faut que  $N$  vérifie la même loi que  $U$  définie en A.

On peut aussi utiliser `model` de la partie B.

8/  $t \mapsto \frac{1}{t}$  décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc par

l'intervalle  $[k, k+1]$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et ainsi par

l'encadrement de l'intégrale on a :

$\forall t \in [k, k+1] \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$  donc  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$

9/ Nous étudions  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \mathbb{P}[N=k] = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k+1}$

Ce qui revient à l'étude de  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k}$

par 8/ on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*$   $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

Donc par la relation de Charles, pour  $N \geq 2$  on a :

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{k=2}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^N \frac{1}{k}$$

$$\text{Mais } \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \frac{1}{t} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \ln t \right]_2^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln N - \ln 2 = +\infty$$

et ainsi, par théorème de comparaison :  $\sum_{k=2}^N \frac{1}{k} = +\infty$  ; la série  $\sum_{k=2}^N k P[N=k]$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} = +\infty$  ; la série  $\sum_{k=2}^N k P[N=k]$  diverge et ainsi, la variable aléatoire  $N$  n'a pas de espérance.

## Exercice II

Partie A

1°)  $K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est un polynôme annulateur de  $K$

2°)  $K^2 = 0$  donc  $X^2$  est un polynôme annulateur de  $K$ .  
Ce polynôme admet 0 pour unique racine donc 0 est la seule éventuelle valeur propre de  $K$ .

Ainsi,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  n'est pas valeur propre de  $K$ .

3°)  $\det A = \det(K - I_2) = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

Donc  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est inversible avec  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4°) on pose et résout  $AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x & -2y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -2y \\ -y \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui amène à  $y=0$  et  $x \in \mathbb{R}$  reste quelque chose. Les solutions sont les vecteurs  $X$  de la forme  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
5°) On a donc  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à  $-1$ , qui est donc bien une valeur propre de  $A$ .

A et  $I_2$  commutent : donc  $A = K - I_2 \Leftrightarrow K = A + I_2$  et ainsi  $K^2 = (A + I_2)^2 = 0$  par 1°) d'où

$(X+1)^2$  est un polynôme annulateur de  $A$  faisant de  $-1$  la seule valeur propre possible de  $A$ .

6°)  $K$  et  $I_2$  commutent d'où, par la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = (K - I_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} K^k (-I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} K^k (-I_2)^{n-k}$$

$$\text{Mais } K^2 = 0 \Rightarrow \forall p \geq 0 \quad K^{2+p} = K^2 \cdot K^p = 0 \cdot K^p = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} K^k (-I_2)^{n-k} \\ &= (-1)^n \binom{n}{0} I_2 + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} K \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie B

1°) On calcule  $TV = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V$   
Donc, ayant  $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  on a  $V$  vecteur propre de  $T$  associé à la valeur propre 2 de  $T$ .

2°) on calcule  $TW = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ -2+1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow TW = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -W \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

W est un vecteur propre de T associé à la valeur propre -1

3°) a)  $Q(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$

On a donc -1 racine de  $Q(X)$ . On va passer

$$\begin{array}{r} X^3 - 3X - 2 \\ -(X^3 + X^2) \\ \hline -X^2 - 3X \\ -(-X^2 - X) \\ \hline -2X - 2 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} X+1 \\ X^2-X-2 \end{array}$$

On factorise  $X^2 - X - 2$  avec le calcul de  $\Delta = 1 - 4(-2) = 9$

Sait  $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

et  $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

Ce qui permet d'écrire  $X^3 - 3X - 2 = (X-2)(X+1)$

et ainsi  $Q(X) = (X+1)^2(X-2)$

b)  $Q(X) = 0 \Leftrightarrow X+1=0$  ou  $X-2=0$

$\Leftrightarrow X = -1$  ou  $X = 2$

Les racines de  $Q(X)$  sont -1 et 2.

4°) on calcule  $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

et ainsi  $T^3 - 3T - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

et finalement  $Q(T) = O_3 \in M_3(\mathbb{R})$

$Q(X)$  est bien un polynôme annulateur de T.

5°)  $Q$  admet -1 et 2 pour seules racines.

en T admet -1 et 2 pour valeurs propres par 2°)

Donc -1 et 2 sont les seules valeurs propres de T et forment  $\text{Sp } T = \{-1, 2\}$

6°) on calcule  $TP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -12 \\ 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

remarque:

et  $PD = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -12 \\ 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On remarque que  $TP = PD$

7°) Nous remarquons que  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  où A est

la matrice de la partie A.

Nous concluons  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

Nous proposons de l'établir par récurrence.

Initialisation: pour  $n=1$  on a  $D^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

or  $n=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & 2n(-1)^{1-1} \\ 0 & 0 & (-1)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D^1$

La propriété est initialisée

Herédité: Supposons pour  $n \in \mathbb{N}^*$  donc quelconq

que  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ ; Calculons:

$D^{n+1} = D^n \cdot D = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(par hypothèse de récurrence)

$$\text{Donc } D^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+2} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n \cdot (-1) & 2 \cdot (-1)^n - 2n \cdot (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 2(n+1)(-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{ayant:} \\ 2 \cdot (-1)^n - 2n \cdot (-1)^{n-1} \\ = 2 \cdot (-1)^{n-1} [-1 - n] \\ = 2 \cdot (-1)^n (n+1)$$

Ce qui correspond à la famille conjecturée au rang  $n+1$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 2n \cdot (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

8°)  $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -14 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Cette dernière matrice est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible et ainsi,  $P$  est aussi inversible.

ajout  $v$  en 6° que  $TP = PD$  et comme  $P$  est inversible on a aussi  $T = PD P^{-1}$ .

On nous mentionne  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T^n = P D^n P^{-1}$  par récurrence

Initialisation: avec  $n=1$  on a déjà  $T = P D P^{-1}$

Soit  $T^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$  et donc l'initialisation

hérédité Supposons que, pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé on ait  $T^n = P D^n P^{-1}$ ; nous avons

alors  $T^{n+1} = T^n \cdot T = (P D^n P^{-1}) T$  par hyp. rec  
 $= P D^n P^{-1} P D P^{-1}$  par la remarque initiale  
 $= P D^n I_3 D P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}$   
 $= P D^{n+1} P^{-1}$

Ainsi, l'hérédité est vérifiée.

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T^n = P D^n P^{-1}$

### Exercice III

$$f(x) = x + 1 + 2 \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\ln x}{x} = 0$$

1°) Par croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 1 + 2 \times 0 = +\infty$   
 (calcul dans  $\mathbb{R}$ )

Comme  $\forall x > 0 \quad f(x) - (x+1) = 2 \frac{\ln x}{x}$  on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = 0$$

2°)  $f$  est bien de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$  admet

donc  $f$  est somme, produit de fonctions de classe  $C^2$

sur  $\mathbb{R}_+^*$  (donc  $f$  est  $C^2$ )

$$\text{On calcule } f'(x) = 1 + 0 + 2 \times \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \times 1}{x^2} = 1 + 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\text{Soit } \forall x > 0 \quad f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} (1 - \ln x)$$

3° a)  $f$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables

sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on a :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = 2x + 0 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \left( x - \frac{1}{x} \right)$$

$\forall x > 0 \quad u'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1$

Or sur  $\mathbb{R}_+^*$  on a  $x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$  d'où :

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | - | 0 | +         |

peut principe de Lagrange

où  $f \circ u(1) = 1^2 + 2 - 2 \ln 1 = 2 + 1 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = 0 + 2 - 2 \times (-\infty) = +\infty \text{ [calcul du } \mathbb{R}]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 - 2 \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ 1 + \frac{2}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x^2} \right]$$

$$= (+\infty) \times (1 + 0 - 2 \times 0) = +\infty$$

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$  par croissances comparées

b) D'après tableau des variations de  $u$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  on

a)  $u$  est strictement croissant en  $x=1$  un minimum de  $u$  d'où :

$$\forall x > 0 \quad u(x) \geq 3 > 0 \text{ et ainsi } u' \text{ est strictement}$$

positive sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$c) \text{ on a } f'(x) = 2 \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right) + 1 \text{ par } \mathcal{L}'$$

$$= \frac{2 - 2 \ln x + x^2}{x^2} \text{ pour } x > 0$$

donc  $f'(x)$  est du

signe de  $u(x)$  pour  $x > 0$ .

Or,  $x^2 > 0$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et que  $f' \circ u$  est de

le signe de  $u > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $f' \circ u$  est de

le signe de  $u > 0 \Rightarrow f' \circ u$  est strictement positif

par le principe de Lagrange.

59 a) on peut exposer : pour

$$x+1 > f(x) \Leftrightarrow 0 > 2 \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 > \ln x \text{ pour } x > 0$$

de signe de  $\ln$  est connu comme fonction de référence

donc  $x+1 > f(x) \Leftrightarrow 1 > x > 0$

Soit :  $\mathcal{C}$  est en dessous de  $\mathcal{D}$  sur  $]0;1[$

$\mathcal{C}$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$  sur  $]1;+\infty[$

Et  $\mathcal{D}$  se coupe  $x=1$

De plus, par  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$  donc

Et  $\mathcal{D}$  est asymptote au voisinage de  $+\infty$

$$b) \quad \mathcal{C}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= \frac{u(1)}{1^2} (x-1) + 2$$

$$= 3x - 3 + 2 = 3x - 1$$

$$\text{Soit } \mathcal{C}_2 : y = 3x - 1$$

$$c) \text{ on a } \mathcal{C}_2 \text{ que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1+2 \frac{\ln x}{x}$$

$$(\text{calcul de } \mathbb{R}) = 0 + 1 + 2 \times \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Donc  $\mathcal{C}$  admet bien ( $x=0$ ) l'axe des ordonnées

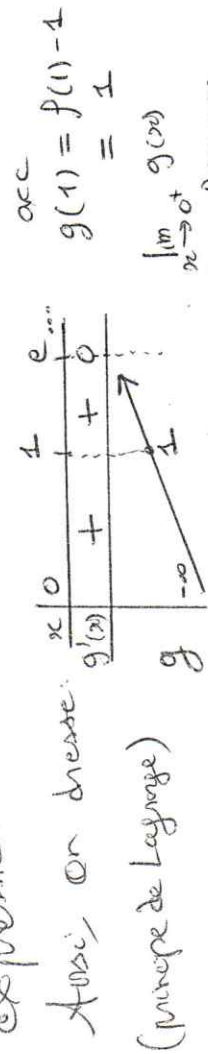
pour asymptote verticale.

d) e) voir courbes

6/a)  $g$  est différence de  $f$  avec  $\text{id} : x \mapsto x$   
 donc  $g$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .  
 Ainsi  $\forall x > 0 \quad g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{u(x)}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}$   
 $= \frac{u(x) - x^2}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$

or  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x$   
 $\Leftrightarrow e > x > 0$  pour  $x > 0$

alors  $x^2 > 0$  qui ne change pas le signe de  $1 - \ln x$   
 expression étudiée.



Ainsi, sur  $[0; 1]$ ,  $g$  est continue  
 strictement croissante et varie de  $-\infty$  à 1 donc  
 par le théorème des valeurs intermédiaires on a  
 l'existence de  $x \in ]0; 1[$  tel que  $g(x) = 0$  et  
 par son caractère, cette solution est unique.

Or  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$   
 $\Leftrightarrow f(x) = x$

D'où le résultat

b) Nous pouvons prolonger le tableau des  
 variations de  $g$  en calculant  $g(e) = f(e) - e$   
 $= e + 1 + 2 \frac{\ln e}{e} - e = 1 + \frac{2}{e}$

pour  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + 2 \frac{\ln x}{x} - x$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = 1 + 0 = 1$

(par croissances comparées)  
 $\Rightarrow \forall x \geq e \quad f(x) > 1$  comme  $f'(x) < 0$   
 pour  $x \geq e$  et ainsi  $f$  décroissante minorée par 1  
 sur  $]e; +\infty[$ .

Sur  $[1; e]$  on a  $f(x) \in [1; 1 + \frac{2}{e}]$  et aussi,  
 $f(x) = x$  n'admet aucune solution pour  $x \in [1; +\infty[$   
 c)  $x$  est l'abscisse de l'unique point  $I$  d'intersection  
 de  $C$  avec  $\Delta : y = x$

d)  $\forall x > 0 \quad x = f(x) \Leftrightarrow x = x + 1 + 2 \frac{\ln x}{x}$   
 $\Leftrightarrow 0 = 1 + 2 \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = -\frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} x$   
 $\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2} x}$

e) On procède par récurrence.  
 Initialisation :  $u_0 = 1 \in ]0; 1[$   
 Hérédité : Supposons que, pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}$  jive  
 On ait  $0 \leq u_n \leq 1$ , alors  $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2} u_n}$  parait

décure :  $0 \leq u_n \leq 1$   
 $\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} u_n \leq 0 \quad (-\frac{1}{2} < 0)$   
 $\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{1}{2} u_n} \leq e^0 = 1$   
 $\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq 1$  car  $\exp > 0$   
 et est croissante

On en déduit aussi que  $u_{n+1} \leq u_n$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in ]0, 1[$

f) from math input  
 $n = \text{int}(\text{input}(\text{"valeur de n"}))$

$u = 1$   
 for k in range(n):  
 $u = \exp(-u/2)$

print(u)

g)  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et f continue sur  $]0, 1[$   
 ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  cv

alors  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \Rightarrow f(l) = l$  et  $l$  est l'unique

solution de  $f(x) = x$  donc  $f = \text{id}$  sur  $]0, 1[$

cv effectivement

Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cv effectivement

$(u_n)$  est bornée par 1 et 0, on étudie

$$v_n = u_{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Comme } u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}u_n} \text{ alors } u_{n+2} = \exp\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u_n}\right]$$

$$\text{Soit } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \varphi(u_n) \text{ où } \varphi: x \mapsto e^{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}}$$

$$\text{Mais } x \mapsto -\frac{1}{2}x \text{ décroît sur } \mathbb{R} \text{ (composition)}$$

donc  $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$  décroît sur  $\mathbb{R}$  (composition)  
 et  $\varphi$  est donc croissante comme composée  
 de deux fonctions croissantes, sur  $\mathbb{R}$ .

Il vient:

$$\text{D'une part } v_1 = u_2 = e^{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}} < 1 = u_0 = v_0$$

$$w_1 = u_3 = e^{-\frac{1}{2}u_2} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(u_0)}$$

$$\text{et } u_2 < u_0 \text{ donc } e^{-\frac{1}{2}u_2} > e^{-\frac{1}{2}u_0}$$

$$\text{donc } w_1 > w_0$$

Now pour montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n < v_0 \text{ et } w_n > w_0$$

l'initialisation étant déjà faite, voyons

l'hérédité :

Supposons que, pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  fixé, on ait  $v_{n+1} < v_n$  et  $w_{n+1} > w_n$ . On a, par

$$\text{les variations de } \varphi \text{ (croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{) qu'il en est}$$

$$\varphi(v_{n+1}) < \varphi(v_n) \text{ d'où } \varphi(v_{2n+2}) < \varphi(v_{2n})$$

$$\text{soit } v_{2n+4} < v_{2n+2}$$

$$\text{et ainsi } v_{n+2} < v_{n+1}$$

puis  $\varphi(w_{n+1}) > \varphi(w_n)$  mais, de façon analogue

on a  $w_{n+2} > w_{n+1}$

Conclusion :  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones  
 et bornées puisque  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et bornée par 1  
 et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et bornée par  $u_0 = 1$   
 convergent donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cv aussi et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

## ANNEXE : programmes & Courbes

### Exercice I

partie B :

1°) des  $mbd()$

```
k = 1
D = rd.random()
while D > 1/(k+1):
    k = k+1
    D = rd.random()
return (D)

print("valeur de U simulée : ", mbd())
```

2°)  $ListU = np.random(10000)$   
for  $k$  in range(10000):

$ListU[k] = mbd()$

Graph  $U = plt.hist(ListU, range = (0, 10), bins = 10)$   
 $plt.show()$

### Exercice III

8°) Traces :

$x_1: y = 3x - 1$   
eg

