

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice : Stimulations à densité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4x(1-x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilités.

On considère désormais X une variable aléatoire à densité f dont on désignera par F_X la fonction de répartition

2. (a) Montrer que X admet une espérance et la calculer

- (b) Justifier que X admet une variance puis démontrer que cette variance vaut $\frac{11}{225}$

3. Montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Soient U et V deux variables aléatoires suivant une même loi (à densité) uniforme sur $[0; 1]$ et supposées indépendantes.

On pose $M = \min(U; V)$ et on admet que M est à densité et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}[M > x] = \mathbb{P}[U > x]\mathbb{P}[V > x]$.

On désignera par F_M la fonction de répartition de M .

- (a) On note G la fonction de répartition de U . Expliquer pourquoi V a aussi G pour fonction de répartition.
(b) Décrire la fonction G .
(c) Exprimer $\mathbb{P}[M > x]$ en fonction de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
(d) Donner enfin explicitement $F_M(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$ (on distinguera les cas $x < 0$, $0 \leq x \leq 1$ et $x > 1$)
5. On considère maintenant la variable aléatoire Z définie par $Z = \sqrt{M}$ et on note F_Z sa fonction de répartition.
- (a) Déterminer $F_Z(x)$ en fonction du réel x (on pourra distinguer des cas)
(b) En déduire que X et Z suivent la même loi.
(c) Démontrer enfin que M admet une espérance et la calculer.

6. (Python) :

- (a) RECOPIER puis Compléter le script python suivant pour qu'il simule une réalisation de M puis une réalisation de X et en affiche les résultats obtenus :

```
from math import *
import numpy as np
import numpy.random as rd
U = rd.random()
V = rd.random()
M = np.min(U,V)
X=.....
print(".....",.....)
print(".....",.....)
```

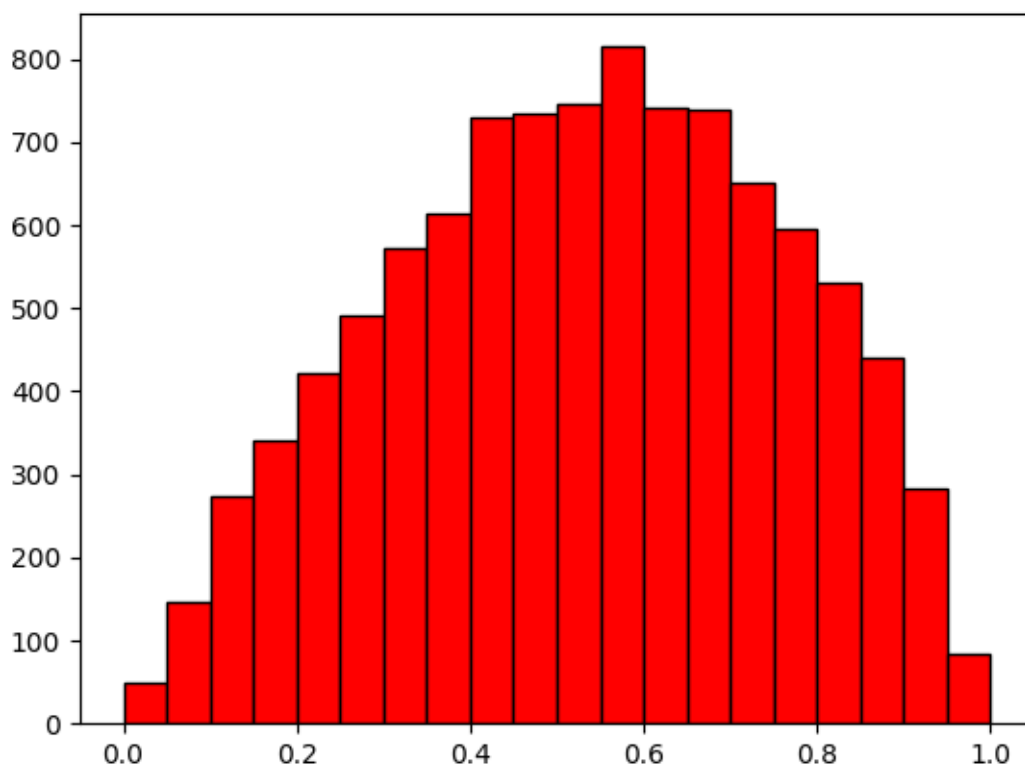
On suppose dans la suite que les appels de la commande `loiX()` génèrent des réalisations mutuellement indépendantes de la loi de X .

- (b) On souhaite réaliser un histogramme permettant de visualiser la répartition des valeurs de la variable aléatoire X . Pour cela, on ajoute les lignes suivantes aux programmes déjà existant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
def simulX(N):
    ListX = np.zeros([N])
    for k in range(N):
        ListX[k] = loiX()
    return(ListX)
Hist=plt.hist(simulX(. . . . .), range = (. . . . .), bins = . . . . .)
plt.show()
```

Recopier puis compléter la ligne de déclaration de Hist pour que ce script affiche un histogramme à 20 barres réparties sur l'intervalle $[0; 1]$ obtenu avec 10 000 simulations.

- (c) Voici le résultat graphique obtenu après exécution du programme précédent :



A partir de ce graphique, estimer une valeur du premier quartile en expliquant votre démarche ainsi que le niveau d'approximation du résultat proposé..

Problème I : C'est du propre!

Partie A

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on définit une matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer I_3^2 et A^2 .
(b) En déduire que l'équation $M^2 = I_3$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet au moins quatre solutions.
- Soit λ un réel strictement positif.

On définit les matrices N et T par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

- Vérifier que $N^2 = O_3$.
- Déterminer deux réels a et b tels que $T = aI_3 + bN$.
- Soient x et y deux réels. On pose $M = xI_3 + yN$. Calculer M^2 .
- En déduire que l'équation $M^2 = T$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet exactement deux solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

Partie B

On note $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Vérifier que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice B , et préciser pour chacun la valeur propre associée.
- On considère le script Python suivant :

```
import numpy as np
I = np . eye (3)
B = np . array ([[ -1 , 4 , -1] , [ -2 , 5 , 2] , [0 , 0 , -2]])
P = np . array ([[1 , 2 , 1] , [0 , 1 , 1] , [1 , 0 , 0]])
Q = np . array ([[0 , 0 , 1] , [1 , -1 , -1] , [-1 , 2 , 1]])
R = np . dot (P , Q ) - I
S = np . dot (Q , np . dot (B , P ))
print ( R )
print ( S )
```

A son exécution, on obtient :

```
[[ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]]
[[-2  0  0]
 [ 0  1  0]
 [ 0  0  3]]
```

En vous appuyant sur le script et les résultats de la fenêtre d'exécution, que peut-on en conjecturer sur les matrices P et B ?

3. On suppose qu'il existe une matrice M de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$ et on note $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (a) Justifier que $DM = MD$.
 - (b) Justifier que $DMV = -2MV$.
 - (c) On note $MV = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que $-2b = b$ et que $-2c = 3c$.
En déduire que $MV = aV$.
 - (d) Calculer M^2V de deux manières différentes et aboutir à une contradiction.
4. Que peut-on conclure sur l'équation $M^2 = D$ d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$?
5. On admet les conjectures effectuées à la question 4.
- (a) Montrer que si une matrice M vérifie l'équation $M^2 = B$, alors on a $(QMP)^2 = D$.
 - (b) Que peut-on en conclure sur l'équation $M^2 = B$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$?

Problème III : Un jeu, deux versions et trois thèmes

Dans tout ce problème, on admettra que si X est une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ et Y est une autre variable aléatoire définie sur le même espace, alors $X + Y$ est encore une variable aléatoire.

On dispose d'un dé à N faces où N est un entier naturel non nul *pair* que l'on pourra écrire $N = 2p$ où $p \geq 2$ (le dé comporte donc au moins 4 faces au total). On suppose ce dé équilibré et ses faces numérotées de 1 à N .

Partie I : Première version du jeu

Dans cette version du jeu, un joueur lance le dé et note X la valeur de la face du dé obtenue. Ensuite, on relance le dé et on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si ce nouveau résultat est un numéro impair et 0 sinon.

Le *score total* du joueur pour une partie de ce jeu est alors la valeur réalisée de $X + Y$.

Exemple : Si les deux lancés amènent 3 puis 2 alors $X = 3$ et $Y = 0$ (car 2 n'est pas impair).

Le score total est alors $X + Y = 3 + 0 = 3$ dans ce cas.

On admettra que les lancés de dés sont indépendants les uns des autres

1. (a) Combien de numéros pairs comporte ce dé lorsque $N = 2p$ est fixé ?
(b) Reconnaître, en justifiant, les lois respectives de X et de Y .
En donner les valeurs respectives d'espérance et de variance.

2. Python :

- (a) RECOPIER puis compléter le programme suivant pour qu'il simule le score total obtenu à l'issue d'une partie de cette version du jeu :

```
from math import*
import numpy as np
import numpy.random as rd

def score_v1(p):
    N=2*p
    X = rd.randint(1,n+1)
    Y = .....
    return .....
```

- (b) On souhaite simuler trois parties : une avec un dé à 4 faces, une avec un dé à 6 faces et une avec un dé à 20 faces. Proposez des lignes de commandes d'appel à la console python permettant d'effectuer ces simulations une fois le script qui précède exécuté :

```
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>>
>>>
>>>
```

3. Justifier que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.
4. On pose $S = X + Y$. Déterminer $S(\Omega)$, ensemble des valeurs (possibles) prises par S .
5. (a) Justifier que l'on a : $\mathbb{P}[S = 1] = \frac{1}{2N}$ et $\mathbb{P}[S = N + 1] = \frac{1}{2N}$
 (b) Soit $k \in \llbracket 2; N \rrbracket$. Déterminer $\mathbb{P}[X + Y = k]$.
 (c) Vérifier par le calcul, en utilisant la valeur trouvée dans la question précédente, que :

$$\sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{P}[X + Y = k] = 1$$

Comment interpréter cette égalité pour la variable aléatoire S ?

6. Calculer la valeur de $\mathbb{E}[X + Y]$ puis interpréter dans le contexte du jeu cette valeur.
7. En justifiant, déterminer la valeur de $\text{cov}(X; Y)$.
8. Déterminer enfin $\mathbb{V}[S]$.

Partie II : Seconde version du jeu

Dans cette version du jeu, on lance le dé une première fois, on note X le numéro de la face obtenue (encore une fois) mais cette fois-ci, on relance autant de fois que nécessaire ce dé jusqu'à obtention d'un résultat différent de X . On notera alors Y la variable aléatoire qui vaut 1 si ce dernier résultat est impair et 0 sinon.

Enfin, on désigne par T le nombre total de fois où le dé a été lancé au cours de cette expérience.

1. *Etude de T :*
 - (a) Justifier que $T \geq 2$ est toujours vérifié.
 - (b) On suppose que $[X = k]$ est réalisé, avec $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Justifier que la loi conditionnelle de $T - 1$ sachant $[X = k]$ réalisé est géométrique de paramètre $\frac{2p-1}{2p}$.
 - (c) Décrire la loi (marginale) de T
 - (d) Etablir que T admet une espérance et une variance et les donner.
2. Dans cette question, k désigne un entier compris entre 1 et $N = 2p$ et l est un entier vérifiant $l \geq 2$
 - (a) On suppose ici que k est pair. Justifier que $\mathbb{P}_{[X=k] \cap [T=l]}[Y = 1] = \frac{p}{2p-1}$
 - (b) On suppose ici que k est impair. Justifier que $\mathbb{P}_{[X=k] \cap [T=l]}[Y = 1] = \frac{p-1}{2p-1}$
 - (c) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}[Y = 1] = \begin{cases} \frac{p}{2p-1} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{p-1}{2p-1} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}[Y = 1]$ puis identifier la loi (marginale) de Y .
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la valeur de covariance entre X et Y .

Synthèse des jeux

En argumentant à partir des données numériques des deux versions de jeu proposées, déterminer celle qui confère au joueur le meilleur avantage en termes de score, en moyenne.