.

Suites Réelles

Exercice $\boxed{1}$ Suites arithmétiques

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Justifier.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 3n - 2$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \dfrac{4n-7}{5}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = n^2 + 3$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = (2n-1)(3n+1)$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \dfrac{n^2+n-6}{n+3}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 3^{2n+1}$

Exercice $\boxed{2}$ Suites géométriques

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Justifier.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 3n - 2$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \dfrac{4}{3^n}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = n^2 - 6$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = (1-n)(4n+3)$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 3,06 \times 10^{-5} \times 1,007^{3n+4}$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = n(n-1)$

Exercice $\boxed{3}$ Suites arithmétiques et géométriques - relation de récurrence

1. Pour chacune des suites suivantes, déterminer les 4 premiers termes (du rang 0 au rang 3) puis indiquer s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique le cas échéant.
   a . $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$
   b . $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; v_n = 5^{-1} \times v_{n-1}$
   c . $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; w_n = 2^{n^2-1}$
   d . $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n\sqrt{2}+3)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(((n+1)^2 - n^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Pour chacune des suites précédentes, écrire le terme de rang $n+2$ en fonction du terme de rang $n+1$, pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice $\boxed{4}$ Suites arithmétiques et géométriques - en contexte Pour chaque situation, proposer une modélisation à l'aide d'une suite bien choisie puis répondre au problème donné.

1. On place un capital de 25 000 e sur un compte en banque proposant une rémunération à taux d'intérêt fixe de $0,75\%$ annuel. Au bout de combien d'années disposera-t-on de 30 000 e ?
2. Une population de bactéries évoluant dans un reste alimentaire oublié sur une assiette (hors du réfrigérateur) se voit augmentée d'un quart de son effectif toutes les trois heures. Initialement, seule un dizaine de milliers de bactéries était présente. Quelle est la population de bactéries obtenue au bout de deux jours d'oubli ?
3. Sur une carte de jeu, on peut lire : *Au début de votre étape de fin [de tour], créez X jetons de créature 2(force)/2(endurance) noire Zombie, X étant deux plus le nombre de zombies que vous contrôlez.*

   Au bout de combien de tours la force totale additionnée des zombies ainsi créés sera de 1000, si au début le joueur ne contrôlait aucun zombie ?
4. Dans le monde fictif de Ravnica, la tempête de mille ans provoque autant d'éclairs chaque nouveau jour que le nombre déjà passé d'éclairs tous les jours précédants depuis le début de la tempête. Le premier jour de la tempête, il y a eu un éclair. Combien d'éclairs observera-t-on au dernier jour de cette tempête ? On pourra fournir un ordre de grandeur (sous forme scientifique)

Exercice $\boxed{5}$ Suites arithmético-géométriques

1. Déterminer le n^{ieme} terme ($n \in \mathbb{N}$) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$
2. Déterminer le n^{ieme} terme ($n \in \mathbb{N}$) de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 5v_n + 1 \end{cases}$

Exercice $\boxed{6}$ Sommations numériques

Calculer les valeurs des sommes suivantes :

1. $A = 1 + 3 + \cdots + 101$; $B = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} + \cdots + \dfrac{-16}{3} + \dfrac{-18}{3}$; $C = 7 + \dfrac{36}{5} + \dfrac{37}{5} + \cdots + +10$

2. $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{1}{6561}$; $B = 2 - 4 + 8 \cdots + 2048$; $C = \dfrac{5}{2} + 1 + \dfrac{2}{5} + \cdots + \dfrac{2^{20}}{10^{10}}$

Exercice $\boxed{7}$ Remboursements à anuités constantes

Un particulier contracte un emprunt de $M = 250\ 000$ €auprès d'une banque sur 15 ans à un taux d'intérêt annuel de 2%. On souhaite déterminer le montant *constant* m à rembourser chaque mois afin de rembourser l'emprunt avec les intérêts portés.
A cette fin, on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que u_n représente le montant restant à rembourser après n années écoulées.

1. Combien vaut u_0 ? Combien vaut u_{15} ?
2. On pose $a = 12m$ l'anuité correspondante à la mensualité m. Justifier que $u_1 = 1,02u_0 - a$ puis établir la relation générale liant u_{n+1} et u_n.
3. Déterminer, de façon explicite, u_n en fonction de n et de a.
4. Déduire des questions qui précèdent la valeur de m.
5. Généraliser l'étude avec un nombre N d'années (entier naturel non nul), une valeur d'intérêts $\tau > 0$ (en pratique exprimé en pourcentage) et un montant $M > 0$ total d'emprunt initial.

Exercice $\boxed{8}$ Approche de la récurrence

On se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = \sqrt{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Ecrire u_{n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = 2$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} > u_n$. Justifier alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

Exercice $\boxed{9}$ Approche de la récurrence

On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant $f_0 = f_1 = 1$ puis $f_2 = 2\times 1$; $f_3 = 3\times 2\times 1$; $\ldots$; $f_n = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$.
Cette suite sera nommée *factorielle* et on a coutume d'écrire $f_n = n!$.

1. Décrire la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.
2. Etablir que, pour tout $n \geq 4\quad f_n > 2^n$.

Exercice $\boxed{10}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Sommations algébriques - approche du symbole Σ

a) Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs des sommes suivantes :

1. $A_n = 1 + 3 + \cdots + 2n + 1$; $B_n = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} + \cdots + \dfrac{-2n}{3}$; $C_n = \dfrac{36}{5} + \dfrac{37}{5} + \cdots + \dfrac{36 + 2n}{5}$

2. $A_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$; $B_n = 2 - 4 + 8 \cdots - 4^n$; $C_n = \dfrac{5}{2} + 1 + \dfrac{2}{5} + \cdots + \dfrac{2^{2n}}{10^n}$

b) Ecrire les sommes précédentes au moyen du symbole Σ.