.

Ensembles, parties d'un ensemble

Exercice $\boxed{1}$ On se donne les ensembles suivants :

$$A = \{\bullet\ ;\ \circ\ ;\ \diamond\ ;\ *\ ;\ \times\ ;\ \oplus\} \qquad B = \{3\ ;\ \circ\ ;\ \diamond\ ;\ \star\ ;\ +\ ;\ \oplus\} \qquad C = \{\wedge\ ;\ \vee\ ;\ \heartsuit\} \qquad D = \{A\ ;\ B\}$$

On note enfin Ω l'ensemble de ces quatre ensembles.

1. A-t-on $A \in \Omega$? $A \subset \Omega$? Mêmes questions avec B, C et D au lieu de A.
2. Peut-on trouver x et y éléments de Ω tels que $x \in y$? $x \subset y$?
3. Déterminer les cardinaux de A,B et C. Que vaut $\#D$?
4. Expliciter les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$, puis indiquer leurs cardinaux respectifs.
5. Expliciter les ensembles $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(D)$ en indiquant leurs cardinaux respectifs.

Exercice $\boxed{2}$ Décrire complètement l'ensemble $\mathcal{P}(\{1;2\})$ puis l'ensemble $\mathcal{P}(-1\ ;\ 0\ \ 1)$ puis en donner les cardinaux respectifs.

Exercice $\boxed{3}$ Décrire un ensemble X tel que $X \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ ainsi qu'un ensemble Y tel que $Y \cap \mathcal{P}(Y) \neq \emptyset$

Exercice $\boxed{4}$ **(avec des inéquations)**

1. On se donne l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 1 \geq x - 3\}$. Réécrire l'ensemble A au moyen d'intervales et d'opérations ensemblistes.
2. Même question avec $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 \leq x^2 - 1\}$ ainsi que $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{x-1} < \frac{x+1}{x^2+1}\right\}$

Exercice $\boxed{5}$ On définit quatre parties de $\mathbb{R}$ comme suivent :

$$A = \{0\ ;\ 1\ ;\ 4\} \qquad B = [-1;3] \qquad C =]-\infty\ ;\ 1] \qquad D = \{-3\} \cup \mathbb{R}_+^*$$

1. Décrire les ensembles complémentaires (dans $\mathbb{R}$) de chacun de ces ensembles.
2. Déterminer les ensembles $B \cap \overline{C}$ ainsi que $\overline{A} \cup D$.
3. Représenter graphiquement les ensembles $B \times C$ et $D \times A$.

Exercice $\boxed{6}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soient X, Y et Z trois parties quelconques d'un même ensemble Ω.

1. Démontrer que, si $X \subset Y$ et $Y \subset Z$ alors on a $X \subset Z$.
2. Démontrer que, si $X \subset Y$ alors $X \cap Z \subset Y \cap Z$.
3. Etablir que $(X \cap Y) \cap (X \cap Z) = X \cap Y \cap Z$

Exercice $\boxed{7}$ Ecrire la négation des phrases suivantes :

1. La table est en bois ou la chaise est bleue.
2. Ce chat est drôle et paresseux.
3. Soit tu seras reçu à HEC, soit tu seras reçu à l'EDHEC.
4. Soit tu ranges ta chambre, soit tu mets la table
5. Si tu ranges ta chambre, alors tu ne sera pas privé d'argent de poche
6. Si tu ne prends pas de note, alors tu auras une mauvaise note.

Exercice $\boxed{8}$ On pose $A = \{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit,\ \}$ et $B = \{J,\ Q,\ K\}$. Décrire le produit cartésien $A \times B$ puis donner le nombre de parties de $A \times B$.

Exercice $\boxed{9}$ On pose $C = \{\bullet\ ;\ \square\ ;\ \circ\}$ et $D = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$. Décrire le produit cartésien $A \times B$ puis donner le nombre de parties de $A \times B$.

Exercice $\boxed{10}$ **(En lien avec la logique)**
Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble de la population humaine et $\mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les tâches réalisables par ordinateur. On notera $a \rhd b$ le fait que "a peut être fait par b".

1. Traduire par une phrase en langage courant l'écriture mathématique $\forall x \in \mathcal{T}\ \ \exists h \in \mathcal{P}\ \ x \rhd h$
2. Exprimer mathématiquement puis en langage courant la négation de cette même proposition.

Exercice $\boxed{11}$

1. On se donne trois ensembles de couples de réels :

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ 2x + y = 1\} \qquad E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ 6x - 4y = 0\} \qquad F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ -x + 2y = 3\}$$

   Dans un repère orthonormé, représentez les ensembles D, E et F.
2. On considère les deux équations d'inconnues x et y réelles suivantes (formant un *système*) :

$$\begin{cases} 2x & +y & = & 1 \\ 6x & -4y & = & 0 \end{cases}$$

   Résoudre ce système.
3. Déterminer $D \cap E$ puis, de façon similaire, déterminer $E \cap F$
4. Sans calcul, déterminer $D \cap E \cap F$

Exercice $\boxed{12}$

1. On se donne trois ensembles de couples de réels :

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ 2x - y = 3\} \qquad B = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ 3x + y = 0\} \qquad C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ -x + 3y = 1\}$$

   Dans un repère orthonormé, représentez les ensembles D, E et F.
2. On considère les deux équations d'inconnues x et y réelles suivantes (formant un *système*) :

$$\begin{cases} 2x & -y & = & 3 \\ 3x & +y & = & 0 \end{cases}$$

   Résoudre ce système.
3. Déterminer $A \cap B$ puis, de façon similaire, déterminer $B \cap C$
4. Sans calcul, déterminer $A \cap B \cap C$

Exercice $\boxed{13}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit les suites (u_n) et (v_n) comme des suites géométriques de raisons respectives 2 et $\dfrac{1}{2}$ avec $u_0 = 0,1$ et $v_0 = 100$.

1. Expliciter les ensembles $M = \{n \in \mathbb{N} \ |\ u_n \geq v_n\}$ et $N = \left\{n \in \mathbb{N} \ |\ \frac{u_n}{v_n} \geq 2\right\}$.
2. Existe-t-il une relation d'inclusion entre M et N ?
3. On définit maintenant une suite d'ensembles $M_k = \left\{n \in \mathbb{N} \ |\ \frac{u_n}{v_n} \geq k\right\}$.
   (a) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble $M_k \cap M_{k+1}$.
   (b) Quels sont les entiers naturels n qui sont éléments de *tous* les ensembles M_k ?

Exercice $\boxed{\mathbf{14}}$ Un numéro de sécurité sociale (INSEE) est un code écrit au le format $SAAMMDDCCCNNN - \varphi$ où :

S est un chiffre binaire indiquant le genre de l'individu.
$AAMM$ encode l'année et le mois de naissance de l'individu.
$DDCCC$ est le code commune officiel de l'INSEE.
NNN est le rang de naissance de l'individu parmi ceux ayant les mêmes caractères qui précèdent.

Le nombre φ est une clé calculée de façon unique à partir de tous les chiffres qui précèdent.

1. Quel ensemble décrit les possibilités de la partie $SAAMM$?
2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des codes communes de France. On admet que $\#\mathcal{C} = 36\ 000$ par simplicité. Déterminer le nombre total de codes INSEE possibles.
3. Si l'on introduisait un troisième caractère de type S pour les individus non-binaires, combien de codes supplémentaires pourrait-on alors créer ?

Exercice $\boxed{\mathbf{15}}$ Les anciennes plaques d'immatriculation étaient initialement écrites sous le format $XXXX - \Lambda\Lambda - DD$ où :

$XXXX$ est un nombre à quatre chiffres
$\Lambda\Lambda$ un couple de lettres (majuscules)
DD le code départemental.

1. Quel ensemble décrit les possibilités de la partie $XXXX$? Combien y-a-t-il d'éléments possibles pour $\Lambda\Lambda$?
2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des codes départementaux de France. On admet que $\#\mathcal{D} = 100$. Déterminer le nombre total de plaques d'immatriculations que l'on pouvait produire.
3. Comment expliquer que ce système ait du être changé ?
4. La première modification ayant été apportée consistat à produire de nouvelles plaques au format $XXXX-\Lambda\Lambda\Lambda-DD$. Ce nouveau système permet-il de produire plus de plaques que le premier mis en place ? Justifier.

Exercice $\boxed{\mathbf{16}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soient A et B deux ensembles. Etablir que : $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

Exercice $\boxed{\mathbf{17}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit Ω un ensemble et $(X;Y) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Déterminer le plus simplement possible $(X \cap Y) \cup (X \backslash Y)$.