.

Récurrence et symbole Σ

Exercice $\boxed{1}$ Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique de raison* r lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$$

1. Rappeler l'écriture explicite du terme général d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Démontrer par récurrence le résultat rappelé.

Exercice $\boxed{2}$ Soit $q \in \mathbb{R}$ fixé. On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique de raison* q lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n$$

1. Rappeler l'écriture explicite du terme général d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Démontrer par récurrence le résultat rappelé.

Exercice $\boxed{3}$ On note I_n le $(n+1)^{ieme}$ entier naturel impair (ainsi, $I_0 = 1$, $I_1 = 3$ etc...)
On désignera enfin par s_n la valeur de $I_0 + I_1 + \cdots + I_n$.

1. Calculer s_0, s_1, s_2 et s_3.
2. Proposer une écriture de s_n à l'aide du symbole Σ.
3. Quitte à calculer quelques termes de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supplémentaires, quelle conjecture peut-on effectuer sur les valeurs s_n (avec $n \in \mathbb{N}$) ?
4. Démontrer la conjecture par récurrence (en espérant qu'elle soit correcte...)

Exercice $\boxed{4}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on définit la *factorielle* de n notée $n!$ par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} 0! = 1 & \text{(par convention)} \\ (n+1)! = (n+1) \times n! & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Comment pourrait-on écrire $n!$ explicitement (pour $n \geq 2$) ?
2. Justifier que la suite des factorielles $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. L'est-elle au sens large ?
3. Etablir que la propriété $\mathcal{P}_n$: $n! \geq 2^n$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ est héréditaire mais non vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels non nuls pour lesquels la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice $\boxed{5}$ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = {u_n}^2$

1. Exprimer u_3 en fonction de a.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = a^{2^n}$.

Exercice $\boxed{6}$ On se propose de donner une fomule générale de calcul de la somme :

$$S_n = 0 + 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les premiers termes de S_0 à S_4 puis décrire S_n à l'aide du symbole Σ.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice $\boxed{7}$ Sur un échiquier vide, le petit Phu place deux tours noires d'apparences indiscernables.
Les cases de l'échiquier étant repérées (par une combinaison Lettre-Chiffre), de combien de façons le petit Phu pourrait-il disposer ses tours ?

Exercice $\boxed{8}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on rappelle que la somme $S_n = 0+1+2+\cdots+n$ peut être obtenue au moyen de la formule :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. On pose $v_n = {S_n}^2$. Déterminer les valeurs de v_0 ; v_1 ; ... ; v_4 puis écrire v_n dans le cas général avec $n \in \mathbb{N}$.
2. On définit à présent C_n, pour $n \in \mathbb{N}$ comme :
$$C_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$
Calculer quelques premiers termes de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'observez-vous ?
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

Exercice $\boxed{9}$ On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{4-v_n} \quad \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. A quelle condition *tous* les termes de cette suite seraient-ils bien définis dans $\mathbb{R}$?
2. Etablir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \in [0; 2]$.

Exercice $\boxed{10}$ **(Sommation comme suite)** On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N} \;\; S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k}$.
Déterminer une écriture explicite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en étudier les variations.

Exercice $\boxed{11}$ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Etablir que, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes (strictement) positifs, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante
2. Que penser de la réciproque ?

Exercice $\boxed{12}$ **(Calculs de Sommations)**
Calculer explicitement, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs des sommations suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{k=0}^{2n-1} 5^{-k+3} \qquad \textbf{b)} \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}\right) \qquad \textbf{c)} \sum_{i=n}^{2n} k \qquad \textbf{d)} \sum_{k=1}^{n} \frac{4k+3}{n} \qquad \textbf{e)} \sum_{k=2}^{n} \frac{4^k - 3^{k+1}}{n^2+1}$$

Exercice $\boxed{13}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Etudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 2.
2. Démontrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$
3. Peut-on trouver un terme de la suite S_n supérieur à $1,999$? à $2,018$?