.

Polynômes à coefficients réels

Exercice 1 Vocabulaire des polynômes

Parmi les fonctions suivantes, indiquez celles qui sont polynômiales en x puis, le cas échéant, en donner le degré :

1 **a.** $f(x) = \dfrac{3}{4}x^3 - x^2$ **b.** $g(x) = \dfrac{x(x-2)}{7}$ **c.** $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 - x + 1}$ **d.** $m(x) = x + 3x^2 - 5x^4 + 10x^5$

2 **a.** $p(x) = x - \sqrt{x} + 1$ **b.** $q(x) = \dfrac{1}{7} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}$ **c.** $r(x) = \dfrac{6x^2 + 3}{x^2 + 0,5}$ **d.** $s(x) = x\sqrt{3} - x^3\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

1. (série 1) Résoudre $f(x) = 0$ ainsi que $g(x) = 0$.
2. (série 2) Résoudre $q(x) = 0$ ainsi que $s(x) = 0$.
3. (série 1) Justifier h ne s'annule pas sur son domaine de définition que l'on déterminera.
4. (série 2) On notera $t = \sqrt{x}$. Résoudre l'équation $t^2 - t + 1 = 0$ et en déduire les solutions de $p(x) = 0$.

Exercice 2 Factoriser au mieux les polynômes $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X$ ainsi que $Q(X) = X^2 - 4X + 4$ et donner leurs racines réelles.

Exercice 3 Soit le polynôme $P = 3X^3 - 13X^2 + 2X + 8$

1. Vérifier que 1 est une racine de P
2. En déduire une forme factorisée de P
3. Donner l'ensemble de toutes les racines de P.

Exercice 4 On pose $P_0(X) = X + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1}(X) = X^2 P_n(X) - 1$

1. Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3.
2. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n.
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la constante (associée au degré 0) du polynôme P_n.

Exercice 5 On pose $Q_0(X) = -2X$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $Q_{n+1}(X) = XQ_n(X) + X$

1. Expliciter les polynômes Q_1, Q_2 et Q_3.
2. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le degré de Q_n.
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la constante (associée au degré 0) du polynôme Q_n.

Exercice 6 Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$mx^2 = (m-1)x + 1$$

Exercice 7 Résoudre, en fonction de $m \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$mx^2 + 2mx = 9x - 6$$

Exercice 8 $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soient P et Q deux polynômes admettant une même racine a commune. Démontrer qu'alors le polynôme $P + Q$ admet encore a pour racine. Est-ce encore vrai pour le produit PQ des deux polynômes ?

Exercice 9 Effectuer la division euclidienne de $P(X) = 2X^5 - 6X^4 + 12X^3 + 2X^2 - 5X + 1$ par $X - 3$.

Exercice 10 Effectuer la division euclidienne de $Q(X) = 3X^5 + 2X^4 - 10X^3 + 4X^2 + 2X - 3$ par $X - 2$.

Exercice 11 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^5 + X - 1$ par $X + 1$.

Exercice 12 Effectuer la division euclidienne de $B(X) = X^5 - X + 2$ par $X + 2$.

Exercice 13 •Θ**C♯** En utilisant une division euclidienne, étudier les variations de $f(x) = \dfrac{15x - 7}{3x + 2}$ sur son domaine de définition.

Exercice 14 Déterminer un polynôme P tel que $P(-1) = 0$, $P(2) = 1$ et $P(4) = -1$ de degré le plus faible possible.
Quels sont alors tous les polynômes satisfaisant cette condition ?

Exercice 15 •Θ**C♯** Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^5 - 2X^4 + 4X^3 - 7X^2 + X - 10$ par le polynôme $Q(X) = X^2 - 2X + 2$.
Indiquez les degrés respectifs du quotient et du reste obtenus.

Exercice 16 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^6 - 5X^4 + 4X^3 + 2X - 5$ par le polynôme $Q(X) = X^2 + 3X$.
Indiquez les degrés respectifs du quotient et du reste obtenus.

Exercice 17 •Θ**C♯** Déterminer les polynômes de degré 2 vérifiant la relation : $P(X) = P(2 - X)$

Exercice 18 Pour chacune des équations suivantes, proposez un changement de variables $X = u(x)$ afin de résoudre la-dite équation :

1 **a**. $2x^4 - 5x^2 - 6 = 0$ **b**. $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x} + 3 = 0$ **c**. $3\sqrt{x} - 2x = 1$ **d**. $\sqrt{x-1} + \dfrac{3}{\sqrt{x-1}} = 10$

2 **a**. $16 = x^2 + 4x^4$ **b**. $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}$ **c**. $5x = 2 + 3\sqrt{x}$ **d**. $\dfrac{5}{\sqrt{2-x}} = 1 + \sqrt{2-x}$

Exercice 19 Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{t^3 - 5t^2 + 6t - 4}{t - 1}$$

1. Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 5X^2 + 6X - 4$ par $X - 1$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de f sur I. La fonction f est-elle majorée ? minorée ?

Exercice 20 •Θ**C♯** Soit m fonction monôme de degré $n \in \mathbb{N}$.
1. Quelle est la parité de m selon les valeurs de n ?
2. Que dire de la parité de la fonction polynômiale $p(x) = 14x^{12} - 7x^8 + 13x^6 + \frac{1}{19}x^4 - 11$ définie sur $\mathbb{R}$?
3. Que dire de la parité de la fonction polynômiale $i(x) = 7x^{13} + 68x^7 - \frac{2}{9}x^5 + 2x$ définie sur $\mathbb{R}$?
4. Etablir que la fonction $x \mapsto x^7 + x^4$ n'est ni paire ni impaire.
5. Enoncer une règle générale permettant de connaître la parité d'une fonction polynômiale.