Espaces de Probabilités finis

Exercice 1 Modélisation d'expériences

Pour chaque expérience aléatoire proposée, donner une modélisation mathématique au moyen d'un univers $\mathcal{U}$ puis décrivez les événements proposés sous forme ensembliste.

1. On lance trois dés à six faces -un vert, un blanc et un rouge- et on examine les résultats obetnus.
   (a) On considère l'événement A : " on obtient deux as parmi les trois résultats"
   (b) On considère l'événement B : " les trois résultats obtenus se suivent consécutivement dans l'odre des couleurs -vert, blanc puis rouge"
   (c) On considère l'événement C : " les trois résultats obtenus se suivent consécutivement -sans tenir compte des couleurs-"
   (d) On considère l'événement D : " On obtient un triple"
2. On tire une carte d'un jeu habituel de cinquante-deux cartes.
   (a) On considère l'événement A : " On tire un valet"
   (b) On considère l'événement B : " On tire une carte de carreau"
   (c) On considère l'événement C : " On obtient une paire d'as"
   (d) On considère l'événement D : " On tire une carte portant une valeur paire"
3. On lance N pièces équilibrées, $N \in \mathbb{N}^*$. On en examine les résultats.
   (a) On considère l'événement A : " Toutes les pièces tombent sur le même côté"
   (b) On considère l'événement B : " Une pièce exactement tombe sur *face*"
   (c) On considère l'événement C : " Au moins une pièce tombe sur *pile*"
   (d) On considère l'événement D : " En tenant compte de l'orde des lancés, les résultats sont en alternance"
4. On lance, dans l'ordre croissant du nombre maximal de faces, des dés équilibrés respectivement quatre, six, huit, douze et vingt faces
   (a) On considère l'événement A : " Tous les résultats sont des *un* "
   (b) On considère l'événement B : " Tous les résultats sont les scores maxima"
   (c) On considère l'événement C : " Tous les résultats sont des nombres premiers "
   (d) On considère l'événement D : " Les résultats obtenus sont, dans l'ordre, des nombres consécutifs"

Exercice 2 Dénombrement et probabilités

1. Pour chacune des expériences de l'exercice **1**, déterminez les cardinaux de chaque univers $\mathcal{U}$ décrit ainsi que de l'ensemble de ses événements. Quelle probabilité semble la plus adaptée à chacune de ces expériences ?
2. Déterminer les cardinaux de chacun des événements A, B, C et D dans le cadre de chaque expérience.
3. Calculer les probabilités des événements A, B, C et D dans le cadre de chaque expérience.

Exercice 3 Fonctions de probabilités

On se donne un univers $\Omega = \{\omega_1 \ ; \ \omega_2 \ ; \ \omega_3 \ ; \ \omega_4\}$ et une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega))$. Peut-on trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 5x^2 \ ; \quad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = x^2 \ ; \quad \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = 3x \ ; \quad \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = 2x$$

Le cas échéant, indiquer la ou les valeur(s) de x validant ces conditions.

Exercice 4 $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soient A et B deux événements aléatoires d'un espace $(\Omega \ ; \ \mathcal{P}(\Omega) \ ; \ \mathbb{P})$ vérifiant $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donner un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$

2. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque :
   (a) Les événements A et B sont incompatibles
   (b) L'événement $A \cap B$ a une probabilité de $1/4$

Exercice 5 On considère une famille constituée de quatre enfants. On suppose équiprobables les naissances entre filles et garçons.

1. Quelle est la probabilité que cette famille soit constituée de quatre filles ?
2. Vous rencontrez trois enfants de cette famille : ce sont des filles. Quelle estla probabilité que le dernier enfant à rencontrer soit également une fille ?
3. Le père de ces enfants, un éminent docteur, vous présente ses trois enfants les plus agées : ce sont des filles.
   Quelle est la probabilité que l'enfant restant, le plus jeune donc, soit aussi une fille ?

Exercice 6 •Θ$^{C\sharp}$ On suppose dans cette question que l'on dispose de deux dés à N faces, où $N \geq 3$, tous deux correctement équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à N.

1. Démontrer qu'en sommant les résultats obtenus sur chaque face des deux dés lancés, le score la plus probable est $N+1$.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un double avec un lancer de ces deux dés ?
3. **[Python]** Un joueur relance consécutivement cette paire de dés jusqu'à obtenir au moins une fois la valeur $N+1$ en sommant les résultats de deux faces à chaque lancer. Proposer un script Python permettant de choisir la valeur de N et renvoyant le nombre de tentatives effectuées pour aboutir à ce résultat lors d'une simulation.
   On pourra utiliser la commande `rd.random()` qui génère un nombre (pseudo-)aléatoire flottant compris entre 0 et 1 avec équiprobabilités avec la bibliothèque `numpy.random`.

Exercice 7 **N'est-ce point carré ?**

1. On dispose d'un jeu de 60 cartes supposé bien mélangé constitué de cartes pouvant être bleues, rouges, bicolores (bleues *et*rouges) ou *incolores*.
   Sachant que ce paquet contient 22 cartes rouges, dont 12 cartes bicolores ainsi que 24 incolores, quelle est la probabilité de tirer une carte bleue monocolore ?
2. Dans un groupe de 100 personnes, on trouve 34 pratiquants d'arts martiaux, 42 pratiquants de tennis et 12 gamers.
   De plus, 3 personnes se déclarent gamers et pratiquants d'arts martiaux ; 24 personnes se disent pratiquants de tennis et d'art martiaux et 5 sont des gamers pratiquants de tennis.
   Sachant que personne dans ce groupe n'appartient aux trois catégories à la fois, quelle est la probabilité, en interrogeant au hasard une personne de ce groupe, de tomber sur quelqu'un effectuant l'une des trois activités présentées (au moins) ?

Exercice 8 **avec une suite**

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- Si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$, il a une probabilité $a \in]0;1[$ d'être en panne à l'instant n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)
- Si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a une probabilité $b \in]0;1[$ d'être en panne à l'instant n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$

1. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n et p_0 (et selon a et b paramètres fixés)

Exercice 9 On se donne une cible découpée en trois secteurs S_1, S_2 et S_3. On tire une flêche en direction de la cible.
On définit l'événement A_k comme "la flêche atteint le secteur S_k" et R comme l'événement "la flêche rate la cible".

1. Expliquer ce que signifie le fait que : "$(A_1; A_2; A_3; R)$ forme un système complet d'événements".
2. On suppose que la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur l'espace $(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ \mathbb{P})$ associé à cette expérience vérifie :
   Pour une certaine constante réelle c on a : $\forall k \in \{1;2;3\}\ \ \mathbb{P}(A_k) = c \cdot k\ \ ;\quad \mathbb{P}(R) = 4c$
   Déterminer la ou les valeurs de c possibles pour valider ces conditions.
3. Généraliser le résultat précédant dans le cas où la cible est découpée en n secteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), et en prenant pour $\mathbb{P}(R)$ la valeur $(n+1)c$