

Limites de fonctions

Exercice 1 Lectures graphiques - vocabulaire

Pour chaque courbe projetée au tableau, répondre aux questions suivantes (à précision graphique près) :

- Déterminer le domaine de définition
- Quelles semblent être les limites en $-\infty$ et en $+\infty$?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$. Que dire alors de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- Peut-on dire que la courbe de f admet une asymptote horizontale ? Une asymptote verticale ?
- Le tracé permet-il de voir une asymptote oblique ?

Exercice 2 Lectures graphiques - deux courbes croisées

Répondre aux questions d'après les courbes des fonctions f et g projetées au tableau.

- Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions dont la courbe est projetée au tableau.
- Déterminer, à partir du graphique, les limites en $+\infty$ de $f - g$ et de fg .
- Indiquez, en cas d'existence, les valeurs de limites de $\frac{f}{g}$ en 0, en 2^+ , en 2, en $-\infty$.
- par lecture graphique, déterminer, en cas d'existence, les valeurs de :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \circ g)(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$
- Déterminer, d'après le graphique, les valeurs de $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ g)(x)$ puis de $\lim_{x \rightarrow 2^+} (g \circ f)(x)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$

Exercice 3 Aspects Graphiques

1. Pour chacun des cas suivants, tracer une allure de courbe représentative possible pour la fonction f :

- (a) f définie sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 (b) f définie sur \mathbb{R}^* avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$
 (c) f définie sur $]2; +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{5}$
 (d) f définie sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

2. Pour chacun des cas précédents, indiquer les éventuelles droites asymptotes horizontales ou verticales.

Exercice 4 On se donne les fonctions suivantes, définies par leurs expressions respectives :

a. $f(x) = x^2 - 5x + \frac{11}{7}$ b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ c. $h(x) = 2x - \frac{\sqrt{x}}{2}$ d. $m(x) = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

- Déterminer, pour chacune, les limites en chaque borne du domaine de définition.
- Indiquer, pour chacune, les éventuelles droites asymptotes horizontales et verticales.

Exercice 5 On se donne les fonctions suivantes, définies par leurs expressions respectives :

a. $f(x) = \frac{x^3 - x}{9}$ b. $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ c. $h(x) = x^2 + \frac{6}{\sqrt{x+1}}$ d. $m(x) = \sqrt{x^2 + 6} - \frac{1}{x-6}$

- Déterminer, pour chacune, les limites en chaque borne du domaine de définition.
- Indiquer, pour chacune, les éventuelles droites asymptotes horizontales et verticales.

Exercice 6 • $\Theta^{\#}$ **Calculs directs** Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{-3x^3} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} x \left(1 + \frac{1}{x}\right) & 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 - 5x^2 + 1}{12x^3 + 6x + 1} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x - 2}{\sqrt{x + 32}} \\
 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{100} & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 4x + 10}{7x^2 - 3x + 110}\right)^2 & 7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 + x^4)(2 + x)}{x + 5x^5} & 8. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)^4}{\sqrt{x - 1}}\right)^3 \\
 9. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16} & 10. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x}} & 11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + 2x} & 12. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{1 - x^3}}{x^5} \\
 13. \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} & 14. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} - x & 15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} - x & 16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5x^2 - x + 3}{4x^2 - \frac{1}{x}}}
 \end{array}$$

Exercice 7 **Asymptotes Obliques**

On donne les fonctions suivantes :

- série 1.** a. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ b. $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 9}{x + 1}$ c. $h(x) = \frac{3x^2 - 5x + 7}{2x - 1}$
- série 2.** a. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$ b. $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 15}{x - 3}$ c. $h(x) = \frac{4x^2 + 7x - 6}{3x + 2}$

- Déterminer les asymptotes verticales associées à chacune de ces fonctions.
- Existe-t-il des asymptotes horizontales associées à ces fonctions ?
- Pour chacune des fonctions données, utiliser une division de polynômes pour déterminer une droite asymptote au voisinage des infinis.

Exercice 8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$ dont la courbe sera notée \mathcal{C}

- Déterminer la limite de f en 1. En déduire une équation d'une droite asymptote à la courbe \mathcal{C} .
- Démontrer que la droite $d : y = x + 2$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$. L'est-elle aussi au voisinage de $-\infty$?
- Tracer une allure possible pour \mathcal{C} dans un repère orthonormal.

Exercice 9 On considère la fonction h définie par $h(x) = 2\sqrt{x} - 7 + \frac{3}{x}$ dont la courbe sera notée \mathcal{C} .

- Déterminer le domaine de définition de h puis calculer les limites aux bornes de ce domaine.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$. Que peut-on en déduire sur la branche infinie de \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$?
- Tracer une allure possible pour \mathcal{C} dans un repère orthonormal.

Exercice 10 • $\Theta^{\#}$ Calculer les limites suivantes : (a désignant un réel fixé permettant le calcul)

$$\begin{array}{llll}
 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 5)^3 - 125}{x} & 3. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}}{x - 4} & 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2} \\
 5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{a + x} - \sqrt{a}}{x} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + a)^3 - a^3}{x} & 7. \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} & 8. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5}{x - a}
 \end{array}$$