.

Applications

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles bijectives ?

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ **2.** $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$ **3.** $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 2 On définit la fonction réelle f par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3+1}$.

1. Dresser le tableau des variations de f en précisant clairement le domaine réel ainsi que les limites aux bornes.
2. On note $I =]-1; +\infty[$. Résoudre l'équation $f(x) = m$ d'inconnue $x \in]-1; +\infty[$ avec $m \in \mathbb{R}$ fixé.
   On pourra discuter du nombre de solutions selon les valeurs de m.
3. Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle à préciser. Déterminer l'application réciproque f^{-1}

Exercice 3 On définit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Dresser le tableau des variations de f en précisant clairement le domaine réel ainsi que les limites aux bornes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = m$ d'inconnue $x \in [0; 1]$ avec $m \in \mathbb{R}$ fixé (On pourra discuter du nombre de solution selon les valeurs de m).
3. Démontrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ vers un intervalle à préciser. Déterminer l'application réciproque f^{-1}

Exercice 4 **[Python]** Ecrire un script Python qui encode la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Démontrer ensuite que g réalise une bijection de l'intervalle $I = \mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser. Expliciter ensuite la fonction réciproque g^{-1}.

Exercice 5 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Démontrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $E \times E$.

Exercice 6 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 7 Démontrer que la fonction carrée définie sur $\mathbb{N}$ réalise une bijection sur $\mathcal{C}$ l'ensemble des carrés parfaits

Exercice 8 Démontrer qu'il existe une application bijective entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soient E et F deux ensembles donnés non vides.
On suppose qu'il existe deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ vérifiant :

$$\forall x \in E \quad (f \circ g)(x) = x \quad ; \quad \forall x \in F \quad (g \circ f)(x) = x$$

1. Démontrer que f est bijective de E dans F. De même, prouver que g est une bijection de F dans E.
2. En déduire que si E et F sont finis, alors card(E) = card(F)

Exercice 10 **[Python]** On se donne f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = x + y$.

1. Justifier que f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On assimile les réels au type `float` de Python.
   Ecrire un script permettant de définir le fonction f. Identifier alors clairement le type de l'entrée ainsi que votre type de sortie.