.

Conditionnement et indépendance en probabilités

Exercice $\boxed{1}$ **Exo-politique** Sur Orion, deux partis politiques s'affrontent : les Rigos et les Tristos. On sait qu'il y a trois fois plus de partisans pour les Rigos que pour les tristos. Tout habitant d'Orion appartient nécessairement à un -et un seul- des deux partis.

Pour le prochain vote, on propose un projet de loi sur la PAX. D'après les estimations effectuées (sur lesquelles on s'appuiera), 60% des Rigos y sont favorables, 16% y sont opposés. Chez les Tristos, 68% s'opposent au projet et 20% sont sans opinion.

Vous rencontrez au hasard un individu d'Orion (quelle qu'en soit la probabilité, vous avez réussi) et vous lui demandez son opinion concernant le projet de loi PAX.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit *sans opinion* ?
2. L'individu vous a dit qu'il était favorable au projet de loi PAX. Quelle est la probabilité qu'il soit un Rigos ?
3. On suppose ici qu'il vous a répondu être opposé au projet de loi PAX. Quelle est la probabilité qu'il soit un Tristos ?

Exercice $\boxed{2}$ **Tests de dépistage**

Sur une notice de test pour une certaine pathologie, la qualité du test est ainsi précisée :
- Le test, pratiqué sur une personne affectée, est positif dans $99,8\%$ des cas.
- Le test, pratiqué sur une personne non affectée, est négatif dans $99,6\%$ des cas.
- La pathologie affecte une personne sur 100 000 dans la population.

1. Calculez la probabilité qu'une personne soit réellement affectée après avoir découvert que son test est négatif.
2. Calculez la probabilité qu'une personne soit réellement affectée après avoir découvert que son test est positif.
3. Que recommanderiez-vous à une personne ayant découvert que son test est positif alors qu'elle cherche à savoir si elle est affectée ?

Exercice $\boxed{3}$ **Avec vaccination** On a mis au point un test de dépistage d'une certaine maladie qui réagit de la façon suivante :
- Le test réagit positivement pour un quart de la population totale.
- Le test réagit positivement dans huit cas sur dix chez les malades testés.
- Le test réagit positivement dans un cas sur dix chez les individus sains testés.

1. Quelle est la probabilité qu'un individu, de cette population, pris au hasard, soit atteint par cette maladie ?
2. On décide de vacciner un quart de la population. On dénombre $\frac{1}{12}$ de malades parmi les vaccinés mais dans la population des malades, il y a quatre non-vaccinés pour un vacciné..
   Quelle est ainsi la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?
3. Comparer les probabilités, pour un individu, de tomber malade avec, puis sans, vaccin.

Exercice $\boxed{4}$ On dispose de n urnes ($n \in \mathbb{N}^*$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires, supposées indiscernables au toucher. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice $\boxed{5}$ On dispose de deux pièces : une non truquée et une truquée (avec deux piles). On lance un dé classique, non pipé :
- Si on obtient 1, on lance deux fois la pièce non truquée.
- Sinon, on lance deux fois la pièce truquée.

On notera A :“ obtenir pile au premier lancer de pièce"; B :“Obtenir pile second lancer de pièce" et enfin C :“ Le lancer du dé donne 1".

1. Décrire un espace de probabilités $(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ \mathbb{P})$ adapté à la situation.

2. Calculer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
3. Démontrer que A et B sont dépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ mais indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_C$.

Exercice 6 Le jeu de cartes à arnaques

On dispose de trois cartes : une double-face rouges, une double-face blanches et une dernière ayant une face rouge, l'autre blanche.

On tire une carte au hasard et on en montre une face. On parie sur la couleur de l'autre face.

1. Quelle est la probabilité que l'autre face soit effectivement de même couleur que la première ?
2. Dans ce jeu, l'organisateur propose au parieur de miser m euros et de le rétribuer d'un montant égal si l'autre face et d'une couleur différente à celle visible. Le pari est-il rentable pour le parieur ?

Exercice 7 La roulette russe en chocolat

Une boite de chocolats *roulette russe* propose douze chocolats d'aspect identiques, l'un (unique)d'entre eux étant fourré avec un piment extra-fort. Douze personnes décident de se partager les chocolats.

Pour cela, ils se donnent un ordre arbitraire (personne p_1, puis personne p_2 etc...) dans lequel chacun va choisir un chocolat, le manger, puis laisser la personne suivante faire de même avec les chocolats restants.

Cette procédure est-elle équitable pour toutes ces personnes ?

Exercice 8 Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève. Si on tire une blanche, on la retire et on ajoute une noire à la place.

Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

Exercice 9 •$\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Une urne contient $N \geq 2$ boules blanches, $n \geq 1$ boules noires et $N - n$ boules rouges.

1. On tire trois boules avec remise.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage tricolore ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage bicolore ?
2. Mêmes questions avec un tirage sans remise.

Exercice 10 Tous les matins, le docteur Seuss se demande s'il va manger des pancakes ou des céréales. Pour cela, et sachant qu'il n'optera que pour l'une et une seule de ces options de petit-déjeuner, il suit le protocole suivant :

- S'il a mangé des pancakes un matin, il décide de manger des céréales le lendemain s'il obtient *pile* en lançant une pièce équilibrée (il mangera de nouveau des pancakes sinon).
- S'il a mangé des céréales un matin, il lance deux pièces équilibrées : dans le cas où il obtient deux *faces*, il reprendra des céréales le lendemain matin (et il changera de petit-déjeuner sinon).

On notera C_n l'événement *le docteur Seuss mange des céréales au $n$ième matin* et p_n la valeur de $\mathbb{P}(C_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On fixera que, pour $n = 0$, l'événement $\overline{C_0}$ est réalisé.

1. Déterminer p_0, p_1, $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(C_2)$ puis p_2.
2. De façon générale, donner les valeurs (en fonction de n) de $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$
3. Exprimer $\mathbb{P}(\overline{C_n})$ en fonction de p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. Etablir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}. Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
5. Déterminer une expression explicite de la suite (p_n).

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ **parties successives**

Deux joueurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ s'affrontent à un jeu à plusieurs reprises. $\mathcal{A}$ remporte la première partie. La probabilité que $\mathcal{A}$ remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $\frac{1}{2}$. La probabilité que $\mathcal{B}$ remporte sa partie sachant qu'il vient de remporter la précédente est de $\frac{3}{5}$.

On note p_n la probabilité que $\mathcal{A}$ remporte la $n$ième partie. Démontrer que (p_n) est arithmético-géométrique et déterminer l'expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{\textbf{12}}$ On lance deux fois un même dé à six faces et on définit les événements suivantes :

- A :“ Le premier résultat est pair"
- B :“ Le second résultat est impair"
- C :“ La somme des résultats est paire"

1. Etablir que $A,\ B$ et C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.-

Exercice $\boxed{\textbf{13}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$§Un joueur possède un exemplaire de chacun des dés communs de jeux : un dé à 4 faces, un dé à 6 faces, un dé à 8 faces, un dé (non polyhèdral) à 10 faces, un dé à 12 faces et un dé à 20 faces. Aucun n'est truqué et les faces sont numérotées de 1 jusqu'au nombre de faces du dé.

On lance initalement le dé à 4 faces puis, on lance ensuite le dé à 6 faces : si le résultat du dé à 6 faces est strictement supérieur à celui du dé à 4 faces, on lance celui à 8 faces et ainsi de suite. On s'arrête dès qu'un score obtenu est inférieur ou égal au précédant ou si le résultat du dé à 20 faces est supérieur au résultat du dé à 12 faces. On déclarera le joueur *gagnant* dans ce dernier cas.

1. Quelle est la probabilité de lancer le dé à 8 faces en jouant à ce jeu ?
2. Quel univers Ω peut-on proposer pour modéliser ce jeu ?
3. On note $R_{n,k}$ l'événement “le dé à n faces a été lancé et le résultat obtenu est k”. Déterminez les valeurs de n et k pour lesquelles $R_{n,k} \neq \emptyset$ et dénombrer les couples $(n;k)$ correspondant. On notera C l'ensemble de ces couples.
4. Calculer la probabilité de l'événement :
$$E = \bigcap_{k=1}^{5} R_{(2k+2),(k)}$$
et interpréter dans le contexte.
Quelle est la probabilité de gagner le jeu, sachant que E est réalisé ?
5. Proposer un programme SciLab capable de calculer la probabilité de gagner à ce jeu.