.

Continuité - dérivabilité

Exercice $\boxed{1}$ **Fonctons SI** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez la continuité en chaque point *de recollement*

1. Fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{si } x \in [-2;0[\\ 2x & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 & \text{si } x \in [1;3[\\ 2x - 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \in [0;4[\\ \dfrac{4}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{3+x}{x-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3\sqrt{x+2} + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Fonction ζ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 + 2\sqrt{x} & \text{si } x \leq 4 \\ 2 - 3x + x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

puis réécrivez chaque fonction à l'aide de la notation $\mathbb{1}_A$.

Exercice $\boxed{2}$ **Fonction Valeur Absolue**

On définit une fonction sur $\mathbb{R}$ en écrivant :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction est nommée *fonction valeur absolue*.

1. Démontrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$. Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $|x| = 0$?
3. Déterminer les variations de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Démontrer que la fonction valeur absolue est paire puis en déduire la tableau des variations de cette fonction. On complètera avec les limites aux bornes.

Exercice $\boxed{3}$ On se donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ -\sqrt{x} + 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a désigne une constante réelle inconnue.

1. Déterminez l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles f est continue en 1.
2. Dressez le tableau complet des variations de f en prenant pour a une valeur solution de la question 1.

Exercice $\boxed{4}$ On se donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} ax + x^2 & \text{si } x < 3 \\ 4 - \dfrac{3}{x-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où a désigne une constante réelle inconnue.

1. Déterminez l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles g est continue en 3.
2. Dressez le tableau complet des variations de g en prenant pour a une valeur solution de la question 1.

Exercice $\boxed{5}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit f_n fonction sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue en tout $x \in \mathbb{R}$ puis déterminer son signe, ses variations ainsi que ses limites aux bornes.

Exercice $\boxed{6}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit f_n fonction sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que, pour tout $n \geq 2$, f_n est continue en tout $x \in \mathbb{R}_+$ puis déterminer son signe, ses variations ainsi que ses limites aux bornes.

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On donne la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Etablir que f est bien dérivable en 0.
En déduire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$.

Exercice $\boxed{8}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On donne la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$. Démontrer que g est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
En déduire le tableau des variations complet de g sur $\mathbb{R}$ et donner l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$.

Exercice $\boxed{9}$ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la valeur de $a \in \mathbb{R}$ rendant la-dite fonction continue sur l'intervalle étudié (à préciser).
Examiner ensuite la dérivabilité de la fonction obtenue.

1. Fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \begin{cases} x - a & \text{si } x \in [0;3[\\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \in [3;+\infty[\end{cases}$$

2. Fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + a & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{2+3x}{x-2} & \text{si} x < 1 \end{cases}$$

3. Fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+x^2}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

Exercice $\boxed{10}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Calculez les expressions dérivées des fonctions données. L'étude du domaine n'est pas demandée.

1. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ 2. $\sqrt{\dfrac{2+3x}{5-2x}}$ 3. $\sqrt{x^2-2x-5}$ 4. $\dfrac{x+2}{x^2}$ 5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ 6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{x^k}$

Exercice $\boxed{11}$ On reprend la fonction la fonction valeur absolue définie en exercice $\boxed{2}$.

1. Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| = \sqrt{x^2}$
2. Vérifier alors que, pour tous réels x et y on a $|xy| = |x||y|$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$, démontrer que $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.