Dérivation

Exercice $\boxed{1}$ On donne trois fonctions définies par leurs expressions :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 5\ ; \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}\ ; \quad h(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune d'elles :

1. Déterminer les domaines de définition puis de dérivabilité.
2. Rechercher les abscisses des points pour lesquels la courbe représentative admet une tangente horizontale.
3. Dresser le tableau des variations complet (limites comprises)

Exercice $\boxed{2}$ On donne trois fonctions définies par leurs expressions :

$$f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 4x + 7\ ; \quad g(x) = \frac{2x-4}{x^2-1}\ ; \quad h(x) = 3\sqrt{x^2+1}$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune d'elles :

1. Déterminer les domaines de définition puis de dérivabilité.
2. Rechercher les abscisses des points pour lesquels la courbe représentative admet une tangente horizontale.
3. Dresser le tableau des variations complet (limites comprises)

Exercice $\boxed{3}$ Soit u une fonction monotone définie sur un intervalle I à valeurs strictement positives.
Démontrer que $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est monotone, de même variation, que u sur I.

Exercice $\boxed{4}$ Soit u une fonction monotone définie sur un intervalle I à valeurs réelles.
Démontrer que $x \mapsto u^3(x)$ est monotone, de même variation, que u sur I.

Exercice $\boxed{5}$ On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ et un réel a tels que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 - ax & \text{si } x \in]0;1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les réels a pour lesquels f est continue et dérivable en $x = 0$
2. Déterminer les réels a pour lesquels f est continue et dérivable en $x = 1$
3. Peut-on obtenir f continue sur $[0;1]$? Dérivable sur $[0;1]$?

Exercice $\boxed{6}$ Pour chacune des fonctions suivantes, dressez le tableau complet des variations (limites comprises) :

$$f(x) = -x^3 + 3\ ; \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}\ ; \quad h(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Exercice $\boxed{7}$ Pour chacune des fonctions suivantes, dressez le tableau complet des variations (limites comprises) :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5\ ; \quad g(x) = x + \frac{1}{x-2}\ ; \quad h(x) = \sqrt{5-2x}$$

Exercice $\boxed{8}$ On se donne f définie sur $I =]4;8]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3$ et g définie sur $J = \left[-\frac{2}{3};3\right[$ par $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$.
Déterminer $f(I)$ et $g(J)$. Ecrire ensuite sous forme d'encadrement de $f(x)$ et $g(x)$ respectivement ces résultats.

Exercice $\boxed{9}$ On se donne h définie sur $I = \left]-2;-\frac{1}{3}\right]$ par $h(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ et φ définie sur $J = \left[-\frac{1}{5};2\right[$ par $\varphi(x) = 1 - 3x^2$.
Déterminer $h(I)$ et $\varphi(J)$. Ecrire ensuite sous forme d'encadrement de $h(x)$ et $\varphi(x)$ respectivement ces résultats.

Exercice $\boxed{10}$ Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $f(0) = -1$ et $f(4) = 3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0;4]$ (avec égalité uniquement en $x = 0$ ou $x = 4$)

1. Dressez le tableau complet de variations de f sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer un majorant et un minorant de f sur $[-3;5]$. La fonction f est-elle bornée sur $[3;+\infty[$?
3. On suppose dans cette question que $f(-3) = f(1,25) = 0$. Dresser alors le tableau des signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{11}$ Soit h une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

- $h(1) = h(6) = 0$, $h(3) = 4$ et $h(9) = -5$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$
- $h'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3;9]$ (avec égalité uniquement en $x = 3$ ou $x = 9$)

1. Dressez le tableau complet de variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Déterminer un majorant et un minorant de h sur $[2;10]$. La fonction h est-elle bornée sur $]0;4]$?
3. Dresser alors le tableau des signes de h sur $\mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{12}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit $f_n(x) = \left(x^2 - 2x\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer l'expression générale de $f_n'(x)$.
3. En distinguant les cas n pair et n impair, dressez les tableaux de variations des fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice $\boxed{13}$ On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 7}$.
On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+7}$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est bien défini, à valeur positive.
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) - x > 0$ dans $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les variations de (u_n).
5. La suite (u_n) est-elle bornée ?

Exercice $\boxed{14}$ On considère la fonction h définie par $h(x) = 3\sqrt{2x-7}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
On désignera par Δ la droite d'équation $y = x$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Dresser le tableau des variations complet de h.
3. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ avec Δ.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que la droite Δ dans un repère orthogonal dont on précisera les unités choisies.
5. On souhaite à présent définir une suite (u_n) de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Quelle(s) valeur(s) peut-on choisir pour que toute la suite (u_n) soit bien définie ?
   (b) En distinguant les cas pour le choix de u_0, déterminer les variations de la suite (u_n) obtenue.