.

Variables Aléatoires finies

Exercice $\boxed{1}$ Une urne contient une boule portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3. On prélève de cette urne deux boules simultanément et au hasard. On nomme X la somme des numéros obtenus lors d'un tirage.

1. Modéliser l'expérience ainsi que l'application X.
2. Déterminer la loi de X puis en calculer l'espérance.

Exercice $\boxed{2}$ On lance trois dés classiques, équilibrés et on note X le nombre de résultats différents obtenus.

1. Modéliser l'expérience ainsi que l'application X.
2. Déterminer la loi de X puis en calculer l'espérance.

Exercice $\boxed{3}$ On dispose dans une urne de 5 boules : une est noire et les autres sont blanches. Les boules blanches sont numérotées de un à quatre.
On prélève de cette urne des boules sans remise jusqu'à obtention de la noire. On propose à un joueur de se voir rétribuer un gain G calculé comme le total (en euros) des numéros tirés lors de l'expérience.

1. Déterminer la loi de G et décrire sa fonction de répartition de F_G.
2. Quelle valeur pourrait-on demander de payer au joueur pour jouer à ce jeu de sorte qu'il soit équitable ?

Exercice $\boxed{4}$ On lance un dé usuel selon le protocole suivant :
“Si le résultat est *deux* ou plus, on le relance. Si le résultat est *un*, on s'arrête. On ne lancera pas le dé plus de 4 fois."
On note T la variable alétoire qui renvoie le nombre de fois où ce dé a été lancé durant la réalisation de ce protocole.

1. Déterminer la loi de T et décrire sa fonction de répartition de F_T.
2. Quelles sont les valeurs de $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{V}[T]$?

Exercice $\boxed{5}$ On dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont marquées ainsi :

- une face est marquée d'un 0, une autre d'un 3
- deux faces sont marquées d'un 1 et deux faces sont marquées d'un 2

On joue au jeu suivant : un joueur lance une première fois le dé : s'il obtient 0, il s'arrête et son score est nul ; sinon, il le relance une fois et ajoute les deux résultats obtenus.
On note S le score total obtenu.

1. Décrire la loi de probabilité de S
2. Déterminer l'espérance de S.
3. Calculer les valeurs de variance et d'écart-type de S.

Exercice $\boxed{6}$ **Généralités : loi uniforme** $\mathcal{U}[\![1;n]\!]$
On lance un dé supposé équilibré à N faces dont les faces sont numérotées de 1 à N, avec $N \in \mathbb{N}^*$. On note D_N le résultat observé.

1. Décrire la fonction de répartition de D_N. La loi ainsi caractérisée s'appelle *loi uniforme* sur $[\![1;n]\!]$ et est notée $\mathcal{U}[\![1;n]\!]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[D_N]$ pour $N \in \mathbb{N}^*$.
3. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir TD n°5 exercice $\boxed{6}$)
   Déterminer la variance $\mathbb{V}[D_N]$ de la variable aléatoire D_N.

4. On lance deux dés similaires, avec le même nombre de faces. A quel score moyen doit-on s'attendre ?

Exercice $\boxed{7}$ On se donne une urne contenant deux boules blanches et n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$). On procède à des tirages successifs sans remise des boules de cette urne. On note alors T la variable aléatoire renvoyant le numéro du tirage de l'obtention de la première boule blanche.

1. Décrire la loi de T.
2. Exprimer sa fonction de répartition F_T
3. Déduire alors l'espérance de T (en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$) le plus simplement possible.

Exercice $\boxed{8}$ On donne la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ comme :

$$F(t) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;1[}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{1}_{[1;2[}(t) + \mathbb{1}_{[2;+\infty[}(t)$$

1. Vérifier que F est continue à droite en tout $t \in \mathbb{R}$ puis tracer une représentation graphique.
2. Démontrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X
   indication : on pourra créer une expérience aléatoire et définir une VAR dont F est la fonction de répartition
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice $\boxed{9}$ On donne la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ comme :

$$G(t) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-2;+\infty[}(t) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t) + \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(t)$$

1. Vérifier que G est continue à droite en tout $t \in \mathbb{R}$ puis tracer une représentation graphique.
2. Démontrer que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X
   indication : on pourra créer une expérience aléatoire et définir une VAR dont G est la fonction de répartition
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice $\boxed{10}$ On donne une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-2	0	1	2	4
p_i	$0,12$	$0,32$	$0,07$	?	$0,21$	$0,15$

où p_i désigne les valeurs $\mathbb{P}[X = x_i]$

1. Déterminer la valeur manquante du tableau
2. Calculer $\mathbb{P}[-2 \leq X < 3]$ puis $\mathbb{P}_{[X\in]-\infty;1]]}[-2 \leq X < 3]$
3. Déterminer les espérances de X ainsi que $Y = 3X + 2$
4. Calculer $\mathbb{V}[X]$ et $\mathbb{V}[Y]$.

Exercice $\boxed{11}$ On donne une variable aléatoire T dont la loi est donnée par le tableau suivant :

t_i	-1	0	0.5	1	1.5	2.5
p_i	$0,08$	$0,12$	$0,27$	$0,11$	?	$0,09$

où p_i désigne les valeurs $\mathbb{P}[T = t_i]$

1. Déterminer la valeur manquante du tableau
2. Calculer $\mathbb{P}[-1 < T \leq 2]$ puis $\mathbb{P}_{[T\leq 1]}[-1 < T \leq 2]$

3. Déterminer les espérances de T ainsi que $S = 3 - 2T$
4. Calculer $\mathbb{V}[T]$ et $\mathbb{V}[S]$.

Exercice $\boxed{\textbf{12}}$ Une urne contient deux boules portant le numéro 1, deux portant le numéro 2 et une portant le numéro 3.
On note X la somme des numéros portés par deux boules simultanément prélevées depuis cette urne.
Décrire la loi de X, en donner l'espérance et la variance.

Exercice $\boxed{\textbf{13}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On dispose d'un dé à six faces dit *de tir soutenu* fabriqué de la sorte : deux faces portent le numéro 1, deux faces portent le numéro 2, une face porte le numéro 3 et une face porte un symbole *d'enrayement* assimilé à 0.
On lance deux tels dés, indépendamment, et on totalise les scores obtenus.
Quelle est la loi de la variable aléatoire T ainsi obtenue ? On en donnera l'espérance et la variance.

Exercice $\boxed{\textbf{14}}$ **D'après HEC 2008 série T**
On se donne, pour tout l'exercice, une urne contenant 10 boules blanches et 2 noires.
On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.
On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Calculer la valeur de $\mathbb{P}\left[X = 1\right]$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}\left[X = 2\right] = \frac{5}{33}$
   (d) Calculer $\mathbb{P}\left[X = 3\right]$.
2. Montrer que $\mathbb{E}\left(X\right) = \frac{13}{11}$.
3. Calculer la valeur de $\mathbb{E}[X^2]$ après avoir précisé les valeurs possibles pour X^2.
4. Déterminer les valeurs de variance et d'écart-type de X.

Exercice $\boxed{\textbf{15}}$ **La boule noire**
On considère une urne contenant $N \geq 2$ boules indiscernables au toucher, une seule étant noire, les autres blanches.
On procède à des tirages successifs, *sans remise*, depuis cette urne et ce, jusqu'à obtention de la boule noire. On notera X la variable aléatoire réelle renvoyant, à l'issue d'une telle expérience, le nombre de boules effectivement extraites.
Déterminer la loi de X et en déduire son espérance et sa variance (en fonction de N)

Exercice $\boxed{\textbf{16}}$ On dispose d'une urne contenant deux boules noires et quatre boules blanches indiscernables au toucher.

1. On commence par extraire deux boules *simultanément* de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs réalisables pour X.
   (b) décrire la loi de X, puis en calculer son espérance et sa variance.
2. Dans cette partie, on suppose que deux boules ont déjà été extraites. On procède alors à deux nouveaux tirages successifs et sans remise et on note Y la variable aléatoire renvoyant le nombre de boules noiresd obtenues.
   (a) Sans information aucune sur le résultat du premier tirage, quelles sont les valeurs possibles pour Y ?
   (b) On suppose ici que $[X = 0]$ a été réalise. Décrire la loi de Y dans cette situation.
   Mêmes questions en supposant $[X = 1]$ et $[x = 2]$ réalisés successivement.
   (c) Exploiter la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}[Y = 2]$. En déduire $\mathbb{P}_{[Y=2]}[X = 0]$ par le calcul puis expliquer le résultat dans le cadre de l'expérience.
   (d) Calculer $\mathbb{P}_{[Y=1]}[X = 1]$ puis interpréter dans le contexte.

Exercice $\boxed{\textbf{17}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soient $X_1 \ldots X_n$ des variables aléatoires finies avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k]$

Exercice $\boxed{\textbf{18}}$ On considère k dés équilibrés contenant chacuns N faces avec $k \geq 1$ et $2 \leq N < 10$ entiers. On suppose que les lancers de ces dés sont indépendants entre eux.

.

1. Soit D_N la variables aléatoire renvoyant le score obtenu en lançant un de ces tels dés. Retrouver $\mathbb{E}[D_N]$ et $\mathbb{V}[D_N]$ par le calcul.
2. On lance à présent les k dés ensemble et on notera S la somme des résultats obtenus.
   Calculer $\mathbb{E}[S]$ le plus simplement possible.
3. On lance à présent les k dés les uns après les autres et on lit pour résultat le nombre formé en utilisant le premier dé comme chiffre des unités, le second comme chiffre des dizaines et ainsi de suite.
   Ainsi, par exemple, en lançant six tels dés, le dernier résultat lu désignera le chiffre des centaines de milliers.

   Déterminer la valeur moyenne espérée du résultat de cette expérience.

Exercice $\boxed{\textbf{19}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ *Cet exercice pourra être traité avec l'aide d'un outil de calcul numérique*

A la belote, on joue avec un jeu de 32 cartes. Une unique couleur est désignée *atout*. Le calcul des points se fait de la façon suivante :

carte	7	8	9	10	Valet	Dame	Roi	As
Score (non atout)	0	0	0	10	2	3	4	11
Score (atout)	0	0	14	10	20	3	4	11

1. On tire une carte du paquet, au hasard :
   (a) Quelle est la probabilité que ce soit un atout ?
   (b) Quelle valeur moyenne de points peut-on attendre en moyenne ?
   (c) La carte tirée est un atout : quelle serait la valeur en points attendue avec cette information ?
2. On tire deux cartes successivement, sans remise :
   (a) Quelle est la probabilité que les deux cartes soient d'atout ?
   (b) Quelle valeur moyenne de points peut-on attendre en moyenne (le total est la somme des points des deux cartes) ?
   On considérera le fait que le couple royal d'atout vaut un bonus de 20 points ; c'est la fameuse belote !
   (c) Calculer la variance associée
   (d) Rédigez un script Python qui simule un tel tirage et renvoie le score obtenu.

Remarque : Un tel problème n'est pas à considérer comme un exemple de sujet de concours mais plutôt comme un exemple d'une situation réelle pour laquelles les notions étudiées sont exploitées IRL