.

Convexité

Exercice $\boxed{1}$ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente en le point dont l'abscisse est fournie :

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ en $a = 3$

2. $p(x) = x^3 - 5x + 2$ en $a = 1$

3. $g(x) = 2\sqrt{x-1} + \dfrac{2}{x+3}$ en $a = \frac{5}{2}$

4. $q(x) = \dfrac{3 - 2\sqrt{x+3}}{x+4}$ en $a = 0$

5. $h(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{2x+3}$ en $a = 0$

6. $m(x) = \dfrac{3x+7}{2x^2-1}$ en $a = \frac{2}{3}$

Exercice $\boxed{2}$ On donne les fonctions suivantes :

série 1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ $h(x) = 6 - x\sqrt{x}$

série 2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2$ $g(x) = 3x^5 - 7x^4 + 2x - 1$ $h(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{2x}$

Pour chacune des fonctions proposées :

1. Déterminer le domaine de définition réel, ainsi que les limites aux bornes.
2. Calculer les dérivées et dérivées seconde en précisant le domaine de validité.
3. Etudier la convexité sur le domaine de définition trouvé.
4. Déterminer l'ensemble des points d'inflexion de la courbe représentative.
5. Pour chaque point d'inflexion éventuellement trouvé, déterminer une équation de la tangente en ce point.

Exercice $\boxed{3}$ Déterminer l'ensemble des points d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 3\sqrt{x+2} - x$ pour lesquels la tangente $\mathcal{T}_a$ est parallèle à la droite $d : y = -\frac{1}{2}x$.
Pour chacune, étudiez-en la position relative avec la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice $\boxed{4}$ Déterminer l'ensemble des points d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x-3}{1+x}$ pour lesquels la tangente $\mathcal{T}_a$ est parallèle à la droite $\Delta : y = x$.
Pour chacune, étudiez-en la position relative avec la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice $\boxed{5}$ On donne la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion, puis déterminer une équation de la tangente en ce point.
2. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ avec cette tangente.

Exercice $\boxed{6}$ On donne la fonction $g(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - 2x^2 - 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux points d'inflexion, puis déterminer une équation de la tangente chacun de ces points.
2. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_g$ avec chacune de ces tangente.
   indication : on pourra remarquer la parité de g pour simplifier l'étude

Exercice $\boxed{7}$ On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 14x + 12$.

1. Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les solutions de l'équation $f''(x) = 0$. Quelles sont les variations de f' sur $\mathbb{R}$?
3. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \geq 11 - 10x$
4. La courbe représentative de f possède-t-elle un point d'inflexion ?

Exercice $\boxed{8}$ Un peu de généralités

1. La somme de fonctions convexes est-elle convexe ?
2. Soit $\lambda > 0$. Démontrer que f et $\lambda \cdot f$ ont même convexité.
3. Peut-on écrire une règle générale concernant le produit de fonctions convexes ?

Exercice $\boxed{9}$ Encore un peu de généralités

1. La somme de fonctions concaves est-elle concave ?
2. Soit $\lambda < 0$. Démontrer que f et $\lambda \cdot f$ ont des convexités opposées.
3. Peut-on écrire une règle générale concernant le produit de fonctions concaves ?

Exercice $\boxed{10}$ Etude générale de troisième degré

On considère p un polynôme de troisième degré, de coefficient dominant 1, que l'on assimilera à la fonction réelle $x \mapsto p(x)$

1. Démontrer que la courbe représentative de p admet exactement un point d'inflexion.
2. Ce résultat demeure-t-il si le coefficient dominant est quelconque ?

Exercice $\boxed{11}$ Etude générale de quatrième degré

On consdère $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré 4 avec $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ quelconque.

1. Ecrire une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a; b; c; d)$ pour que la courbe représentative de q admette au moins un point d'inflexion
2. Est-il possible que la courbe représentative d'un polynôme de degré 4 (assimilé à sa fonction réelle) admette exactement un point d'inflexion ? Justfier.

Exercice $\boxed{12}$ A partir de tableaux de la dérivée

On donne les tableaux de variations de f' et g', dérivées respectives des fonctions f et g :

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		-3		0		2		5
$g'(x)$	10	$\searrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1. Déterminer les variations des fonctions f sur $\mathbb{R}$ ainsi que celles de g sur $]-\infty; 5[$
2. Déterminer la convexité de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que celle de g sur $]-\infty; 5[$
3. On donne $f(0) = 0$. Esquissez une allure de courbe possible pour f.
4. On donne $g(0) = 2$. Esquissez une allure de courbe possible pour q.

Exercice $\boxed{13}$ Procédez à l'étude la plus complète possible des fonctions de la variable réelle suivantes :

$$\textbf{1}.\ f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1 \qquad \textbf{2}.\ g(x) = \frac{2x-1}{x+5} \qquad \textbf{3}.\ h(x) = 2x^2 - \sqrt{x} + 3 \qquad \textbf{4}.\ m(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{2x+1}}$$