

Devoir à la maison pour les vacances d'été de mathématiques de ECT1

Cette feuille contient des exercices qu'il est important de bien maîtriser avant d'aborder la deuxième année. Des exercices similaires ont été traités tout au long de la première année et pourront donc vous aider à les résoudre. Si toutefois vous rencontrez une difficulté (ou plusieurs) dans la résolution d'une question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail (helene.lanery@ac-normandie.fr). Vous serez interrogés sur une partie des questions posées dans ce devoir lors du première devoir de mathématiques.

Bonnes vacances et bon courage

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{1 + e^x}.$$

Admettons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie 1

- Déterminer la limite de f en $-\infty$. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $-\infty$? Si oui, donner son équation.
 - Déterminer la limite de f en $+\infty$. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.
- Calculer la dérivée de f et déterminer le signe de f' .
 - Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites et la valeur de $f(0)$.
 - Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = 4$?
 - Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$.
- Montrer que la dérivée seconde de f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}.$$

- En déduire que f possède un unique point d'inflexion et préciser un intervalle sur lequel f est convexe et un intervalle sur lequel f est concave.
 - Déterminer alors la position relative de la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f , les asymptotes et la tangente au point d'abscisse 0.
 - Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

- Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Partie 2

- Soit g la fonction définie sur $]0, 4[$ par $g(y) = \ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)$ pour tout réel y de $]0, 4[$.
 - Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 4[$.
 - Pour tout $y \in]0, 4[$, calculer $f(g(y))$.
 - Que représente la fonction g pour la fonction f ?

(c) Déterminer les réels x tels que $0.05 \leq f(x) \leq 2$

7. Un fabricant de rampes de skatepark veut lancer un prototype de rampe. Ainsi il crée une rampe de skatepark dont le profil, c'est-à-dire la forme de la pente, est la courbe de la fonction f . La largeur de la rampe est 1 mètre.

Ce fabricant souhaite que la hauteur maximale de cette rampe soit 2 mètres et que la hauteur minimale soit 5 centimètres.

- (a) Démontrer que la longueur sur le sol de la rampe vaut $\ln(79)$ mètres.
- (b) La rampe est conçue par un moulage en béton et prévoit une pente d'un mètre de large si bien que le volume total de béton prévu est donné par l'aire de la surface du profil (surface grisée).

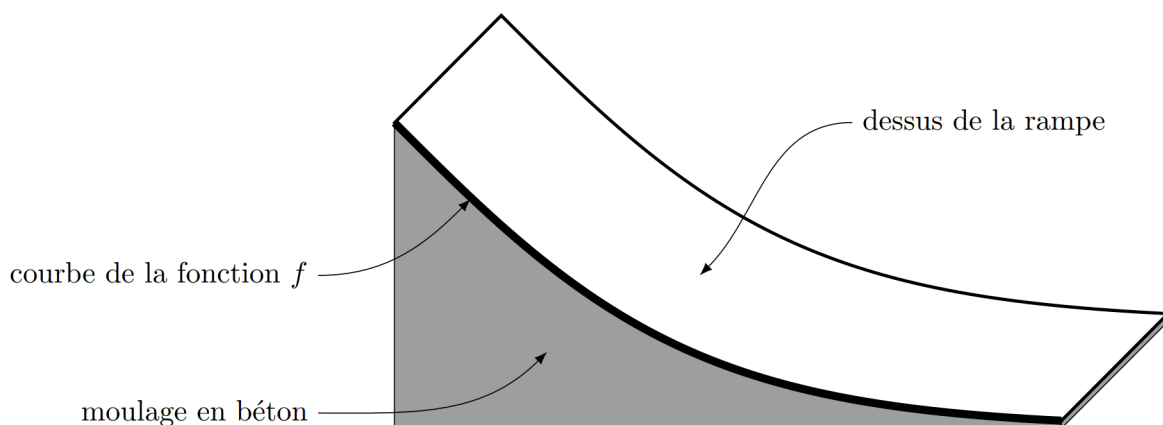


FIGURE 1 – Rampe de skatepark

Déterminer le volume de béton à prévoir pour construire la rampe.

Partie 3

8. Soit

$$h: \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Calculer $I(x) = \int_0^x f(t) dt$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 2 :

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} u_1 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$.

1. Compléter la fonction en langage Python suivante, qui prend en entrée un entier naturel non nul n et un réel u_1 de $[0, 1]$ correspondant au terme initial u_1 de la suite, et renvoie le terme u_n .

```
1 import numpy as np
3 def suite(n, u1):
    u = u1
    for k in range(...):
        u = ...
7 return(u)
```

2. (a) Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$. Notons ℓ sa solution.

- (b) Définissons la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = u_n - \ell$.
Démontrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est géométrique.
- (c) Donner l'expression du terme général de $(w_n)_{n \geq 1}$ en fonction de n et de w_1 .
- (d) En déduire celle du terme général de $(u_n)_{n \geq 1}$ en fonction de n et de u_1 .

Exercice 3 : Nous considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

1. (a) Calculer u_2 et u_3 .
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
- (b) Compléter la fonction Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur n et renvoie la valeur de u_n .

```

1 def suite (n):
    u= 2/3
3     for k in range (1,n):
        u = .....
5     return u

```

2. Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0.$$

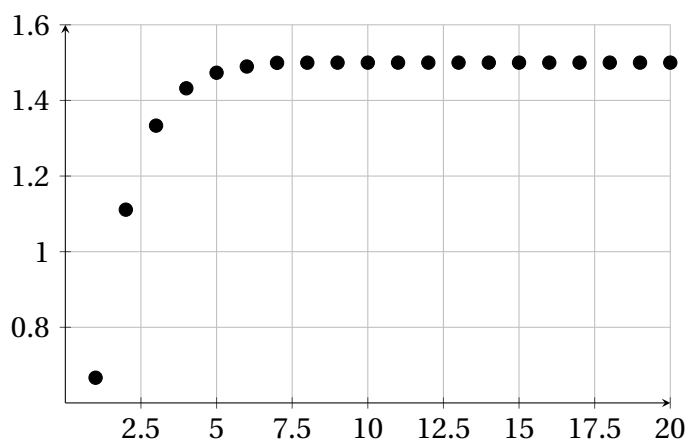
3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ que nous ne demandons pas de calculer ici.
4. Le script Python ci-dessus introduit les variables z et y .

```

1 import matplotlib . pyplot as plt
import numpy as np
3 n=20
x=[k for k in range (1,n +1)]
5 y=[ suite (k) for k in x]
z=np. cumsum (y)
7 plt. plot (x,z, 'o')
plt. show ()

```

Après l'exécution de ce script, le graphique suivant apparaît :



- (a) Expliquer le rôle des variables y et z .
- (b) Que peut-on conjecturer à propos de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$?

5. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{u_n}{n}$
- Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - En déduire pour tout entier n non nul, l'expression de w_n en fonction de n .
 - Vérifier que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $T_n = \sum_{k=1}^n w_k$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Notons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
Admettons que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer la limite de f en $-\infty$.
 $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.
 - En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
 - Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x , et en déduire la position relative de $(\mathcal{D})$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.
- Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T}_0)$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0.
- Tracer dans un même repère l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T}_0)$.
Admettons qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ est 0.69.

Exercice 5 :

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

Supposons que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0.9;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0.95;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0.2.

Choisissons au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, notons R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n -ième semaine ». Pour tout entier naturel n non nul, notons r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine. Nous avons alors $r_n = P(R_n)$.

- Montrer que $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$
- Déterminer ℓ telles que $\ell = 0,75\ell + 0,2$
- Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = r_n - \ell$. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Vous donnerez la raison et le premier terme.
- Donner la forme explicite de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Donner la forme explicite de r_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Donner la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 6 :

Considérons la fonction f définie, pour tout x , par $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$.

Appelons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f .
Calculer de même la dérivée f'' de f' . Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$.
- (b) Étudier la convexité de f . Vérifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.
- (c) Déterminer le sens de variation de f' . Vérifier que $f'(0) = \frac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (b) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées en 2.a).
3. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- (b) Justifier de même que la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
- (c) Notons A le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A .
- (d) Tracer sur une même figure les droites $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{T})$ ainsi que l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution α .
- (b) Justifier que $-1 \leq \alpha \leq 0$
- (c) Recopier et compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```

1 def dichotomie():
2     a=-1
3     b=0
4     while .....:
5         c=(a+b)/2
6         if f(c)*f(a)<0 :
7             b=...
8         else :
9             ...
10    return (...)
```

Corrigé du devoir d'été de mathématiques ECT1-ECT2

Corrigé de l'exercice 1 :

Cet exercice est tiré du sujet de concours ECRICOM 2024

Partie 1

1. (a) Je sais que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1 + e^x} = \frac{4}{1 + 0} = \boxed{4}.$$

Comme la limite est finie, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 4}$ au voisinage de $-\infty$.

- (b) Je sais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi en décomposant numérateur et dénominateur, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x = +\infty$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{0}$. Comme la limite est finie, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 0}$ au voisinage de $+\infty$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f = \frac{4}{u}$, avec $u(x) = 1 + e^x$. Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{4u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, alors j'en déduis que $4e^x > 0$ et $(1 + e^x)^2 > 0$. En conséquence, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) < 0}$.

- (b) Les variations de la fonction f s'obtiennent grâce au signe de la dérivée. D'après la question précédente, comme la dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement décroissante. Aussi $f(0) = \frac{4}{1 + e^0} = \frac{4}{1 + 1} = 2$, ce qui me permet d'établir le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		
f	$4 \xrightarrow{\quad} 2 \xrightarrow{\quad} 0$		

- (c) Comme la fonction f est décroissante et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$, alors la courbe représentative de f est toujours en dessous de la droite d'équation $y = 4$, asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.
- (d) L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$. Or $f(0) = 2$ et $f'(0) = -\frac{4e^0}{(1 + e^0)^2} = -\frac{4 \times 1}{(1 + 1)^2} = -1$. Finalement l'équation de cette tangente est donnée par $y = -1 \times x + 2$, soit $\boxed{y = -x + 2}$.
3. (a) Comme la fonction f est deux fois dérivable, alors la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = -\frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 4e^x & u'(x) &= 4e^x \\ v(x) &= (1 + e^x)^2 & 2 \times e^x \times (1 + e^x), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{4e^x \times (1+e^x)^2 - 4e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\ &= -\frac{4e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} = -\frac{4e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}. \end{aligned}$$

Finalement je retrouve bien la formule souhaitée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

- (b) Les points d'inflexion de la courbe sont les points où la convexité change. Or la convexité s'obtient grâce au signe de la dérivée seconde. J'étudie donc le signe de $f''(x)$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, alors j'en déduis que $4e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$. En outre,

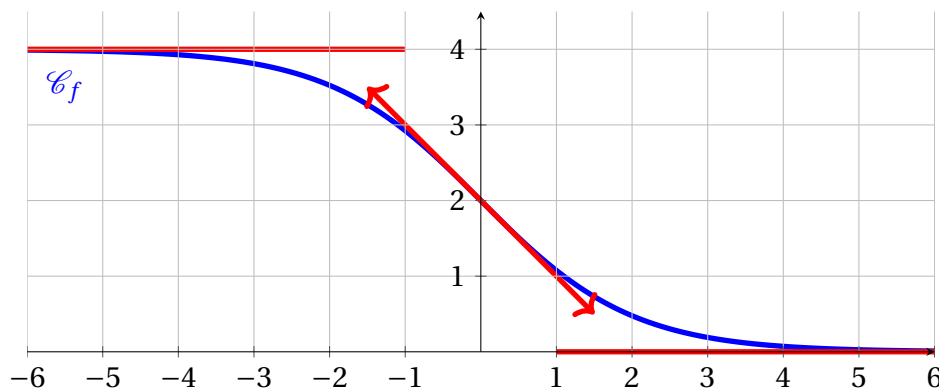
$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq \ln(1) = 0.$$

Par conséquent, j'établis le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Ainsi le point d'abscisse $x = 0$, à savoir le point de coordonnées $(0, 2)$ est l'unique **point d'inflexion** de la courbe représentative de f et la fonction est **convexe** sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et **concave** sur l'intervalle $] -\infty, 0[$.

- (c) Comme le point d'abscisse 0 est le point d'inflexion, et que la courbe est concave avant puis convexe après, alors la courbe se trouve **en dessous de la tangente** sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ et **au-dessus de la tangente** sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- (d) Voici l'allure de la courbe représentative de la fonction f :



4. (a) En partant de la définition de la fonction f , je multiplie numérateur et dénominateur par e^{-x} : pour tout

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{4 \times e^{-x}}{(1+e^x) \times e^{-x}} = \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{4 \times e^{-x}}{e^{-x} + 1}.$$

- (b) Je débute par déterminer une primitive de la fonction f . L'ensemble des primitives s'obtiendront alors en ajoutant une constante et il me suffira de choisir la constante qui convient pour que la primitive s'annule en 0. f semble être de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1 + e^{-x}$. Puisque $u'(x) = -e^{-x}$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{4} \times 4 \times \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{4} \times f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = -4 \times \ln(u(x)) = -4 \times \ln(1 + e^{-x}).$$

Ainsi l'ensemble des primitives de la fonction f sont de la forme

$$F(x) = -4 \times \ln(1 + e^{-x}) + C,$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$. Je calcule alors l'image de 0 :

$$F(0) = -4 \times \ln(1 + e^{-0}) + C = -4 \times \ln(2) + C.$$

Ainsi

$$F(0) = 0 \iff -4 \times \ln(2) + C = 0 \iff C = 4 \ln(2)$$

et la primitive de f qui s'annule en 0 est donnée par

$$F(x) = -4 \times \ln(1 + e^{-x}) + 4 \ln(2) = 4 \times (\ln(2) - \ln(1 + e^{-x})) = 4 \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-x}}\right) = \boxed{4 \ln\left(\frac{2e^x}{1 + e^x}\right)}.$$

Partie 2

5. (a) La fonction f est continue car dérivable et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image, à savoir $]0, 4[$.

- (b) i. Soit $y \in]0, 4[$.

$$f(g(y)) = \frac{4}{1 + e^{g(y)}} = \frac{4}{1 + e^{\ln\left(\frac{4}{y} - 1\right)}} = \frac{4}{1 + \frac{4}{y} - 1} = \frac{4}{\frac{4}{y}} = 4 \times \frac{y}{4} = \boxed{y}.$$

- ii. Comme $\forall y \in]0, 4[, f(g(y)) = y$, alors g est la bijection réciproque de la fonction f , c'est-à-dire $g = f^{-1}$.

- (c) Comme f et g sont bijections réciproques, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = x$. Ainsi comme f est décroissante, alors g est décroissante et

$$0.05 \leq f(x) \leq 2 \iff g(0.05) \geq g(f(x)) \geq g(2) \iff g(2) \leq x \leq g(0.05).$$

Or

$$g(2) = \ln\left(\frac{4}{2} - 1\right) = \ln(2 - 1) = \ln(1) = 0$$

et

$$g(0.05) = \ln\left(\frac{4}{0.05} - 1\right) = \ln(80 - 1) = \ln(79).$$

Donc

$$0.05 \leq f(x) \leq 2 \iff g(2) \leq g(f(x)) \leq g(0.05) \iff \boxed{0 \leq x \leq \ln(79)}.$$

6. En traduisant l'énoncé, le fabricant souhaite que la hauteur de la rampe soit entre 0.05m et 2m, c'est-à-dire $0.05 \leq f(x) \leq 2$. J'ai résolu cette inéquation à la question précédente et j'ai trouvé que cela signifie que $0 \leq x \leq \ln(79)$. La longueur sur le sol de la rampe est donc bien de $\boxed{\ln(79) - 0 = \ln(79)}$ mètre

7. L'aire qui établit le volume de béton nécessaire est donnée par l'intégrale de la fonction f entre les bornes $a = 0$ et $b = \ln(79)$. Je calcule alors cette intégrale à l'aide de la primitive obtenue à la question 5.b), qui s'annule en 0 :

$$\int_0^{\ln(79)} f(x) dx = [F(x)]_0^{\ln(79)} = F(\ln(79)) - F(0) = 4 \ln\left(\frac{2e^{\ln(79)}}{1 + e^{\ln(79)}}\right) - 0 = 4 \ln\left(\frac{2 \times 79}{1 + 79}\right) = 4 \ln\left(\frac{79}{40}\right).$$

Le volume de béton nécessaire est donc de $\boxed{4 \ln\left(\frac{79}{40}\right) \text{ m}^3}$.

Partie 3

8. J'utilise de nouveau la primitive obtenue à la question 5.b), qui s'annule en 0. Ainsi

$$\int_0^x f(x) dx = [F(x)]_0^x = F(x) - F(0) = 4 \ln \left(\frac{2e^x}{1+e^x} \right) - 0 = 4 \ln \left(\frac{2}{e^{-x}(1+e^x)} \right) = 4 \ln \left(\frac{2}{e^{-x}+1} \right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln \left(\frac{2}{e^{-x}+1} \right) = 4 \ln \left(\frac{2}{1+0} \right) = 4 \ln(2).$$

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 4 \ln(2)}$.

Corrigé de l'exercice 2 :

Cet exercice est tiré du sujet de concours ECRICOM 2023

1. Voici la fonction Python complétée :

```
1 import numpy as np
2
3 def suite(n, u1):
4     u=u1
5     for k in range(n-1):
6         u=u*5/12+1/3
7     return(u)
```

2. (a) Je résous l'équation demandée :

$$x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3} \iff x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3} \iff \frac{7}{12}x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}.$$

(b) b) Soit $n \geq 1$. J'exprime w_{n+1} en fonction de w_n :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - \ell = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} - \ell = \frac{5}{12} \times (w_n + \ell) + \frac{1}{3} - \ell = \frac{5}{12}w_n + \frac{5}{12} \times \ell + \frac{1}{3} - \ell = \frac{5}{12}w_n,$$

puisque ℓ est la solution de $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$ ou encore $\frac{5}{12} \times \ell + \frac{1}{3} - \ell = 0$. Ainsi j'ai bien montré que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique, de raison $q = \frac{5}{12}$.

(c) Comme la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est géométrique, de raison $q = \frac{5}{12}$ et de premier terme w_1 , alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \geq 1, \boxed{w_n = w_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}}.$$

(d) Enfin, comme pour tout $n \geq 1$, $u_n = w_n + \ell$ et que $w_1 = u_1 - \ell$, alors

$$u_n = w_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell = (u_1 - \ell) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \ell = \boxed{\left(u_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}}.$$

Corrigé de l'exercice 3 :

Cet exercice est tiré du sujet de concours ECRICOM 2023

1. Je cherche à savoir pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est définie.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'exponentielle e^x est définie et positive.
- En particulier, $1 + e^x > 0$ et comme la fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors l'expression $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

J'ai bien montré que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $\ln(u)$, avec $u(x) = 1 + e^x$. Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

En me servant du fait que pour tout réel x , $e^x > 0$, alors j'obtiens que le quotient $f'(x)$ est strictement positif, donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Je calcule la limite en $-\infty$ en décomposant :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$$

Par composition avec $X = 1 + e^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. J'en déduis alors que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

4. (a) Je raisonne de même pour la limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

Par composition avec $X = 1 + e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(b) En factorisant par l'exponentielle e^x , j'obtiens que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(1 + e^{-x}).$$

Soit $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

(c) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 + 0 = 1$, alors par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$. Comme la limite de la différence est nulle, alors j'en conclus que la droite ($\mathcal{D}$) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$. Or $e^{-x} > 0$ donc $1 + e^{-x} > 1$ et par croissance de la fonction $\ln$, j'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$. Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote ($\mathcal{D}$) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par

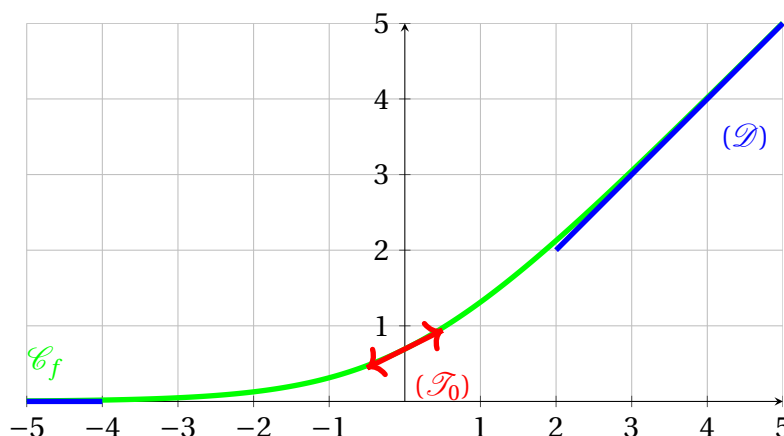
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0). \text{ Or } f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(1 + 1) = \ln(2) \text{ et } f'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Finalement l'équation de la tangente ($\mathcal{T}_0$) est donnée par $y = \frac{1}{2} \times x + \ln(2) = \frac{x}{2} + \ln(2)$.

6. (a) Je sais déjà que f est strictement croissante, je connais les limites et la valeur en 0. Voici donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\ln(2)$	$+\infty$

- (b) Grâce au tableau de variation, à la tangente en 0 et aux asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$, je peux tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$:



Corrigé de l'exercice 4 :

1. (a) Nous avons $u_2 = \frac{2}{3} u_1 = \frac{4}{9}$ et $u_3 = \frac{3}{6} u_2 = \frac{2}{9}$.

Les résultats peuvent être donnés sans justification.

- (b) Nous avons :

```
1 def suite (n):
    u = 2/3
3     for k in range (1,n):
        u = (k + 1) / (3 * k) * u
5     return u
```

Une indulgence sur la syntaxe peut être appliquée.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $\mathcal{P}_n$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{2}{3} > 0 \text{ donc } u_1 > 0.$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $u_n > 0$ et nous voulons montrer : $u_{n+1} > 0$.

Nous avons : $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$. n est positif donc $n+1$ et $3n$ aussi et le quotient $\frac{n+1}{3n}$ aussi et par hypothèse de récurrence $u_n > 0$, d'où : $u_{n+1} > 0$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$, soit $u_n > 0$.

Une attention particulière sera portée sur la rédaction de la récurrence.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{3n} \right) u_n - u_n = \left(\frac{n+1}{3n} - 1 \right) u_n = \left(\frac{n+1-3n}{3n} \right) u_n = \left(\frac{1-2n}{3n} \right) u_n.$$

Et pour tout entier $n \geq 1$, nous avons $1 - 2n \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Nous en déduisons que la suite (u_n) est décroissante

- (b) La suite (u_n) est minorée par 0 (d'après 2.) et décroissante (d'après 3.(a)) donc, d'après le théorème de limite monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel $\ell \geq 0$.

4. (a) Pour n choisi par l'utilisateur, la variable y est une liste qui contient les valeurs de $u_1, u_2, \dots, u_n$. La variable z est une liste qui contient les sommes partielles $u_1, u_1 + u_2, \dots, u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
Les étudiants doivent être capables de manipuler les listes et d'identifier le fonctionnement d'une liste décrite en compréhension, ces notions ayant été vues dès la classe de première technologique. La fonction cumsum fait partie des exigibles du programme de classe préparatoire.

- (b) Nous pouvons conjecturer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est égale à 1,5.

5. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{u_n}{n}$.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{3n} u_n = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{3} w_n$$

donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \frac{2}{3}$.

- (b) Nous en déduisons que pour tout entier naturel n non nul,

$$w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

- (c) Comme la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique, nous avons :

$$T_n = \sum_{k=1}^n w_k = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$. Par somme de limites $(T_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Corrigé de l'exercice 5 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ L'ensemble $\{R_n; \overline{R_n}\}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$$

Par la formule du conditionnement nous avons :

$$r_{n+1} = P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times P(\overline{R_n}).$$

Or $P(R_n) = r_n$ et $P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n) = 1 - r_n$ et $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,95$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,2$. D'où :

$$r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2(1 - r_n) = 0,95r_n + 0,2 - 0,2r_n = 0,75r_n + 0,2$$

Nous avons bien pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

2. Nous avons

$$\ell = 0,75\ell + 0,2 \iff 0,25\ell = 0,2 \iff \ell = \frac{0,2}{0,25} = 0,8$$

La solution est $\ell = 0,8$.

3. Comme $w_n = r_n - \ell$, alors $r_n = w_n + \ell$. D'où :

$$w_{n+1} = r_{n+1} - \ell = 0,75r_n + 0,2 - 0,8 = 0,75(w_n + 0,8) - 0,6 = 0,75w_n + 0,6 - 0,6 = 0,75w_n$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 0,75 et le premier terme $w_1 = r_1 - 0,8 = 0,9 - 0,8 = 0,1$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons $w_n = w_1 q^{n-1} = 0,1 \times 0,75^{n-1}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons $r_n = w_n + \ell = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
6. Comme $-1 < 0,75 < 1$ la suite géométrique $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de raison 0,75 converge vers 0 et par somme de limites, la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $0,8$.

Corrigé de l'exercice 6 :

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $f(x) = \frac{1}{u(x)} + x$, avec $u(x) = 1 + e^x$.
Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} + 1 = 1 - \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = 1 - \frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & u'(x) &= e^x \\ v(x) &= (-1 + e^x)^2 & v'(x) &= 2e^x(1 + e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 - \frac{e^x \times (1 + e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1 + e^x)}{((1 + e^x)^2)^2} = \frac{-e^x \times (1 + e^x) \times ((1 + e^x) - 2e^x)}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{-e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$.

- (b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors $e^x > 0$ et $1 + e^x > 1 > 0$ donc $(1 + e^x)^3 > 0$. Il me reste à étudier le signe de $(e^x - 1)$:

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

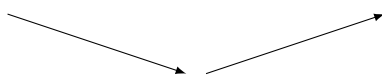
Ainsi j'en déduis que :

- f est concave sur l'intervalle $] -\infty, 0]$, car $f''(x)$ y est négative,
- f est convexe sur l'intervalle $[0, +\infty[$, car $f''(x)$ y est positive.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien un point d'inflexion, de coordonnées $(0, f(0)) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, car

$$f(0) = \frac{1}{1 + e^0} + 0 = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f'' .
J'ai déjà étudié le signe de f'' , je peux directement établir le tableau de signe de $f''(x)$ et les de variations de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f'			

J'évalue $f'(x)$ en $x = 0$: $f'(0) = \frac{1 + e^0 + e^{2 \times 0}}{(1 + e^0)^2} = \frac{1 + 1 + 1}{(1 + 1)^2} = \frac{3}{4}$. Je retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du **minimum** de la fonction f' et ce minimum est positif. J'en déduis donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Je rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Alors

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} + x = +\infty.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} + x = -\infty.$$

- (b) Je connais les limites de f et je sais que la fonction est strictement croissante. Je dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) Je commence par calculer la différence : $f(x) - x = \frac{1}{1 + e^x} + x - x = \frac{1}{1 + e^x}$.

Or j'ai déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question 2.(a) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- (b) Je raisonne de la même manière qu'à la question précédente. Je commence par calculer la différence :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{1 + e^x} + x - x - 1 = \frac{1}{1 + e^x} - 1.$$

Or j'ai déjà calculé la limite de $\frac{1}{1 + e^x}$ en $-\infty$ à la question 2(a). Alors par somme,

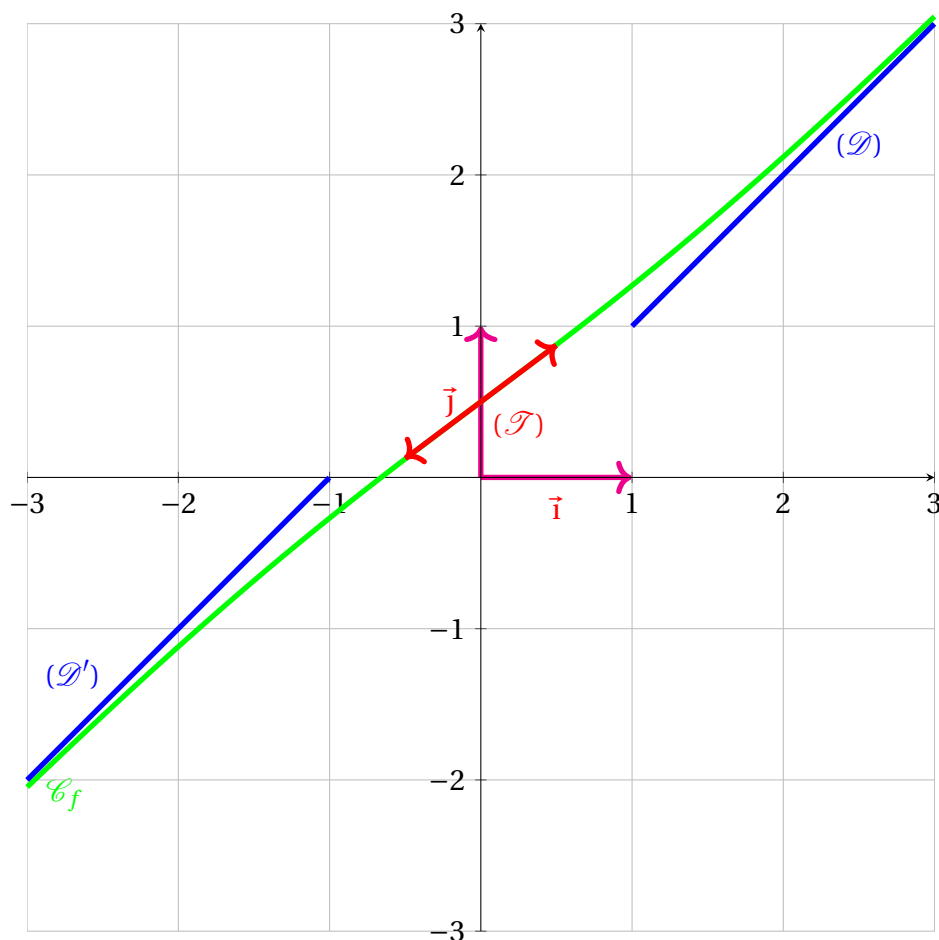
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x + 1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

- (c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$. Je connais déjà $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{3}{4}$. Ainsi

l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

- (d) Voici le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$.



4. (a) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question 1(c)) sur $\mathbb{R}$. J'ai aussi montré que la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi comme $0 \in]-\infty, +\infty[$, par le théorème de la bijection monotone, je peux déduire qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α , de l'équation $f(x) = 0$.
- (b) Je calcule $f(-1)$ et $f(0)$: $f(-1) = \frac{1}{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e}{1+e} - 1 = -\frac{e}{1+e} < 0$ et $f(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Comme $f(\alpha) = 0$, que $f(-1) \leq 0 \leq f(0)$ et que f est croissante, j'en déduis bien que $-1 \leq \alpha \leq 0$.
- (c) Voici le script complété.

```

1 def simulation(n):
2     r=2
3     for k in range(n):
4         if r==2:
5             if rd.random() < 2/3:
6                 r=1
7         else:
8             if r==1:
9                 if rd.random() < 1/3:
10                    r=0
11     return(r)

```