

Inverses et puissances de matrices

1 Rappels sur les opérations de matrices

Définition 1 : Appelons **somme** de deux matrices de **même format** la matrice obtenue en additionnant les coefficients occupant la même position dans chacune des matrices.

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A + B =$$

Définition 2 :

Appelons **produit d'une matrice par un nombre réel** la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de cette matrice par ce nombre réel.

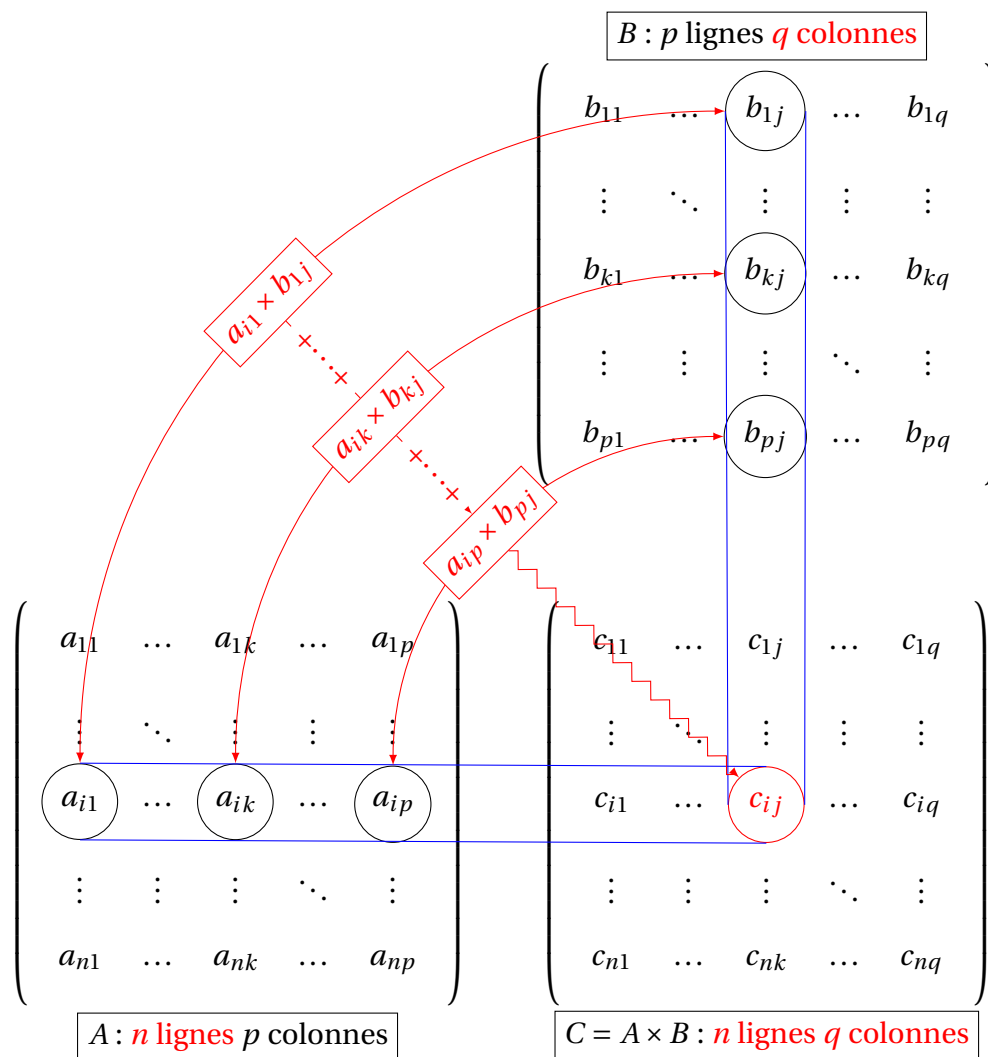
Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad 3 \times A = 3A =$$

Définition 3 : Soit A une matrice de format (n, p) et B une matrice de format (p, q) .

Le **produit** de la matrice A par la matrice B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice C de format $(\dots, \dots)$ dont le coefficient c_{ij} est le produit de la matrice ligne i de A par la matrice colonne j

$$\text{de } B : c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$



Exemple 3 :

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Nous avons :

$AC =$

Nous avons avec le produit AB :

Et avec le produit BA :



La multiplication des matrices est rarement commutative : $AB \neq BA$ en général



Lorsque les produits utilisés sont définis :

Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $AB = 0$ mais la **réciroque est fausse!** $AB = 0$ peut être vérifié sans que $A = 0$ ou $B = 0$.

Ainsi l'égalité $AM = AN$ peut être vérifiée sans que $M = N$.

2 Puissance de matrices

Définition 4 : Nous définissons par récurrence les puissances successives d'une matrice carrée de la façon suivante :

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A^k \times A \end{cases} .$$



Le produit A^k ne s'obtient pas en prenant la puissance $k^{\text{ième}}$ des coefficients de la matrice.

Exemple 4 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^3

Proposition 1 : Soit A une matrice carrée d'ordre n , pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$A^p A^q = A^{p+q} \quad \text{et} \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

.



Puisque la multiplication matricielle n'est pas commutative, les autres règles usuelles sur les puissances dans $\mathbb{R}$ ne sont pas vraies dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple, en général

$$(AB)^2 \neq A^2 B^2 .$$

Proposition 2 : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, A^p B^q = B^q A^p \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, (AB)^k = A^k B^k .$$

Exemple 5 :

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2 puis conclure. Les matrices AB et BA sont-elles égales?

Théorème 3 : Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

De plus les coefficients diagonaux d'un produit de deux matrices diagonales s'obtiennent en effectuant les produits des éléments diagonaux de ces deux matrices.

Exemple 6 :

Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4 :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PDQ$ avec $PQ = QP = I_n$ et D est une matrice diagonale, alors pour tout k entier :

$$A^k = PD^kQ$$

Exemple 7 :

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ et QP

2. Nous définissons la matrice $D = QAP$. Calculer D

3. En utilisant que $D = QAP$, en déduire que $A = PDQ$.

4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3 formule du binôme de Newton

3.1 Formule du binôme de Newton avec les réels

Définition 5 :

Pour n un entier et $k \leq n$ un entier, nous notons $\binom{n}{k}$ et nous disons k parmi n , le nombre de chemins dans un arbre à n niveau Succès-Échec amenant à k succès.

Définition 6 :

pour n entier, nous notons

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad n! = (n-1)!n = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Théorème 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \dots\dots$$

Exemple 8 :

$$\binom{10}{7} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{1} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{n-1} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \binom{n}{n} = \dots\dots\dots$$

Proposition 6 : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dots\dots$$

et

$$\binom{n}{2} = \dots\dots$$

Exemple 9 :

$$\binom{100}{2} = \dots\dots\dots$$

Théorème 7 :

$$\text{Soit } (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ alors : } \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 10 :

Développer de deux manières différentes :

$$(x + 2)^3 = \dots\dots\dots$$

Et

$$(x + 2)^3 = \dots\dots\dots$$

$$(x + 2)^4 = \dots\dots\dots$$

Et

$$(x + 2)^4 = \dots\dots\dots$$

3.2 Formule du binôme de Newton avec des matrices commutatives

Théorème 8 : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Si A et B **commutent**, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Exemple 11 :

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que $A = D + J$.
2. Calculer J^2 . En déduire J^n pour tout $n \geq 2$.
3. Calculer D^n pour tout n entier.
4. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} J.$$

5. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Notion d'inverse de matrices

4.1 Cas général

Définition 7 : Soit A une matrice carrée d'ordre n .

S'il existe une matrice A' carrée d'ordre n telle que $AA' = A'A = I_n$, alors nous disons que la matrice A est **inversible**, et la matrice A' est appelée **matrice inverse de A** .

Nous noterons l'inverse de la matrice A : A^{-1} .

Remarque : Bien que dans les réels tous les nombres sont inversibles sauf 0, ce n'est pas le cas des matrices.

Exemple 12 :

La matrice I_n est inversible et son inverse est elle-même.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

vérifions-le

Proposition 9 :

1. Si une matrice A est inversible, son inverse est unique.
2. Si une matrice A' vérifie $A'A = I$ alors $AA' = I$.
3. Si une matrice A' vérifie $AA' = I$ alors $A'A = I$.

Proposition 10 : Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n et s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $AB = \lambda I_n$ alors l'inverse de A est $\frac{1}{\lambda} B$

Proposition 11 : Si A est une matrice diagonale dont tous les termes sont non nuls. C'est-à-dire, si $a_i \neq 0$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \text{ alors } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 13 : L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est

Proposition 12 : Une matrice carrée triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale) est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple 14 :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ estmais la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Proposition 13 :

1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 14 : Si A est inversible, alors A est simplifiable à gauche et à droite, c'est-à-dire que

$$AB = AC \implies B = C,$$

$$BA = CA \implies B = C.$$

4.2 Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2

Définition 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On appelle déterminant de A le scalaire : $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Théorème 15 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Dans ce cas on a : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 15 :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \dots\dots\dots$$

$$\text{Donc } A \text{ est } \dots\dots\dots \text{ et } A^{-1} =$$

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \dots\dots\dots \text{ Donc } B \dots\dots\dots$$

4.3 Inversion d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

Méthode :

Pour présenter cette méthode nous inverserons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour inverser la matrice A , nous effectuerons des opérations élémentaires sur les lignes qui ramènent à l'identité. Nous effectuons « en miroir » les mêmes opérations élémentaires sur la matrice identité (algorithme de Dorian Gray)

Écrivons donc

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

L'idée est d'avoir sur la partie de gauche la matrice identité et alors la partie de droite sera la matrice inverse de A .

D'abord faisons donc apparaître comme première colonne $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, où a est un réel non nul (sinon la matrice est non inversible). Pour cela enlevons à L_2 deux fois L_1 . Nous avons alors :

Puis on fait apparaître comme deuxième colonne $\begin{pmatrix} * \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, où b est un réel non nul (sinon la matrice est non inversible). Pour cela ajoutons à L_3 la ligne L_2 . Nous avons alors :

Puis avoir comme troisième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, où c est un réel non nul (sinon la matrice est non inversible).

Puis avoir comme deuxième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Puis en divisant la première ligne par 3, la deuxième par -3 et la troisième par 3, nous obtenons :

Et vous avez alors comme matrice inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5 Écriture matricielle d'un système linéaire

On se donne un système linéaire de p équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = b_p \end{cases}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$.

Alors le système linéaire précédent peut s'écrire sous la forme matricielle :

Théorème 16 : Soit (S) un système dont une écriture matricielle est $AX = B$, où A est une matrice carrée inversible. Alors ce système est appelé **système de Cramer**.
Un tel système admet une **unique** solution, donnée par $X = A^{-1}B$.

Preuve

.....

Exemple 11 : Résolution du système $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 6x + 4y = 6 \end{cases}$