

Interrogation de cours du 15 septembre. Sujet 1
Sans calculatrice évidemment !

1. Donner l'hypothèse pour deux matrices A et B pour pouvoir utiliser le binôme de Newton.

.....

2. Donner la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B qui vérifient la condition ci-dessus.

.....

3. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Donner une relation entre A , D et N

.....

- (b) Calculer N^2

- (c) Calculer N^3

- (d) Calculer ND

(e) Calculer DN

(f) Que constatez-vous?

(g) Exprimer D^n en fonction de n .

(h) Donner A^n en fonction de D , N et n pour $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Vous pourrez admettre que $N^k = O_3$ si $n \geq 3$.

.....
.....
.....
.....

(i) Donner les coefficients de A^n en fonction de n pour $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Interrogation de cours du 15 septembre. Sujet 2
Sans calculatrice évidemment !

1. Donner l'hypothèse pour deux matrices A et B pour pouvoir utiliser le binôme de Newton.

.....

2. Donner la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B qui vérifient la condition ci-dessus.

.....

3. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Donner une relation entre A , D et N

.....

- (b) Calculer N^2

- (c) Calculer N^3

- (d) Calculer ND

(e) Calculer DN

(f) Que constatez-vous?

(g) Exprimer D^n en fonction de n .

(h) Donner A^n en fonction de D , N et n pour $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Vous pourrez admettre que $N^k = O_3$ si $n \geq 3$

.....
.....
.....
.....

(i) Donner les coefficients de A^n en fonction de n pour $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

1. L'hypothèse pour deux matrices A et B pour pouvoir utiliser le binôme de Newton est :

les deux matrices doivent commuter

2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Si A et B commutent, alors la formule du binôme de Newton est :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

3. (a) Une relation entre A , D et N est : $A = D + N$.

- (b) Calculons N^2 :

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Calculons N^3

$$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (d) Calculer ND

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Calculons DN

$$DN = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (f) Nous avons $DN = ND$

- (g) Exprimons D^n en fonction de n .

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

- (h) Donnons A^n en fonction de D , N et n .

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2} + 0$$

Car $N^k = O_3$ si $n \geq 3$. Donc :

$$A^n = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2}N^2$$

- (i) Donner les coefficients de A^n en fonction de n Nous avons $D^{n-1}N = 2^{n-1}I_3N = 2^{n-1}N$ et $D^{n-2}N^2 = 2^{n-1}I_3N^2 = 2^{n-1}N^2$. Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

1. L'hypothèse pour deux matrices A et B pour pouvoir utiliser le binôme de Newton est :

les deux matrices doivent commuter

2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

Si A et B commutent, alors la formule du binôme de Newton est :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

3. (a) Une relation entre A , D et N est : $A = D + N$.

- (b) Calculons N^2 :

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Calculons N^3

$$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (d) Calculons ND

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Calculons DN

$$DN = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (f) Nous avons $DN = ND$

- (g) Exprimons D^n en fonction de n .

$$D^n = \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 10^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}$$

- (h) Donnons A^n en fonction de D , N et n .

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2} + 0$$

Car $N^k = O_3$ si $n \geq 3$. Donc :

$$A^n = D^n + nD^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2}N^2$$

- (i) Donner les coefficients de A^n en fonction de n Nous avons $D^{n-1}N = 10^{n-1}I_3N = 10^{n-1}N$ et $D^{n-2}N^2 = 10^{n-1}I_3N^2 = 10^{n-1}N^2$. Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 10^n & n10^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \times 10^{n-1} \\ 0 & 10^n & n10^{n-1} \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}$$