

**Exercice 1 :**

concours

**Partie I : Calcul matriciel**

On considère les trois matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer  $Q \times Q$ .
2. Calculer  $D$ .
3. Justifier que  $M = QDQ$ .
4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ.$$

5. Expliciter les neuf coefficients de la matrice  $M^n$ .

**Partie II : Étude d'une expérience**

On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir PILE en lançant l'une des deux pièces vaut  $\frac{1}{2}$ .

On effectue des lancers selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les deux pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené PILE à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre. On considère, pour tout entier naturel  $n$  non nul, les événements :

- $A_n$  : « obtenir 0 fois PILE à l'étape  $n$  »,
  - $B_n$  : « obtenir 1 fois PILE à l'étape  $n$  »,
  - $C_n$  : « obtenir 2 fois PILE à l'étape  $n$  »,
- et on note  $a_n = P(A_n)$ ,  $b_n = P(B_n)$  et  $c_n = P(C_n)$ .

1. Calculer  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Calculer les trois probabilités conditionnelles  $P_{A_n}(A_{n+1})$ ,  $P_{B_n}(A_{n+1})$  et  $P_{C_n}(A_{n+1})$ .  
*Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.*
3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

5. (a) En déduire que

$$\forall n \geq 1, \quad P(A_n) = 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{4^n} \quad P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n} \quad P(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

**Exercice 2 :** Déterminer  $(3+x)^5$  et  $(2+x)^7$  en utilisant la formule du binôme de Newton sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3 :**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $N^2$  et  $N^3$ . En déduire  $N^n$  pour  $n$  entier  $n \geq 3$ .
2. Calculer  $DN$  et  $ND$ . Que remarquez-vous?
3. En utilisant la formule du binôme, Calculer  $A^n$  pour  $n$  entier,  $n \geq 3$ .

**Exercice 4 :**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $J^2$  et  $J^3$ . En déduire  $J^n$  pour  $n$  entier  $n \geq 3$ .
2. Calculer  $DJ$  et  $JD$ . Que remarquez-vous?
3. En utilisant la formule du binôme, Calculer  $A^n$  pour  $n$  entier,  $n \geq 3$ .

**Exercice 5 :**

$$\text{Donnons } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .  
(b) En déduire que  $A$  n'est pas inversible.
2. (a) Calculer  $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$ .  
(b) En déduire que  $I_3 - A$  est inversible et donner son inverse.
3. Montrer également que  $I_3 + A$  est inversible et donner son inverse, après avoir calculé  $(I_3 - A)(I_3 - A + A^2)$ .

**Exercice 6 :**

$$\text{Considérons la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $-A^3 - 3A^2 - 3A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle inversible? Si oui, expliciter son inverse.

**Exercice 7 :** Calculer les inverses (si c'est possible) des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8 :**

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de Gauss, montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont inversibles et calculer leurs inverses.

**Exercice 9 :**

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.
2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 10 :** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites définies par la donnée de  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$  et les relations de récurrence valables pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases}$$

Posons pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. (a) Donner  $U_0$ .  
 (b) Déterminer une matrice  $A$  telle que pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .  
 (c) Montrer par récurrence que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = A^n U_0$ .
2. Posons  $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $P$  est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$$

3. Soit  $D = P^{-1}AP$ 
  - (a) Calculer  $D$ , puis pour tout entier  $n \geq 0$ , donner  $D^n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) Montrer que  $A = PDP^{-1}$
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,
 
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
  - (b) En déduire l'expression de  $A^n$
  - (c) Déterminer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$