

Nom :

Devoir numéro 1 de mathématiques de ECT2 : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits. Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement. Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise. Ce sujet comporte pages. Le sujet est volontairement trop long. Vous pouvez donc avoir une bonne note sans avoir tout traité! Dans le cas où vous repèreriez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez très lisiblement sur votre copie, proposerez la correction et poursuivrez l'épreuve en conséquence. De même si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement. Bon courage!

Exercice 1 :

Soit A une matrice carrée 3×3 .

Supposons qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 2 :

Une agence de voyage de la zone euro propose un circuit touristique pour visiter les 3 villes A, B et C. Le client peut choisir la durée du séjour dans chaque ville. L'agence distingue deux périodes, la haute et la basse saison, et différencie ses tarifs selon la période.

Les tarifs journaliers dans les différentes villes, en centaines d'euro par personne, sont donnés dans le tableau suivant. L'euro est noté €.

	Ville A	Ville B	Ville C
Nombre de jours	1	1	1
Tarif haute saison	2	2,5	1,5
Tarif basse saison	1	2	1

On note P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Monsieur Martin a choisi un circuit qui comprend 3 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville

B et 5 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer le produit matriciel $P \times M$. Que représentent les termes de la matrice obtenue?
 (b) Monsieur Martin dispose de 1 500 €. Pourra-t-il réaliser son voyage?

2. On considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et on note I la matrice unité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le produit matriciel $Q \times P$.

(b) Soient X et Y deux matrices colonnes quelconques à 3 lignes et 1 colonne.

Montrer que, si $P \times X = Y$, alors $X = Q \times Y$.

3. Dans une publicité, l'agence de voyage affirme qu'un circuit complet de 12 jours est possible au tarif de 2 250 € en haute saison et 1 400 € en basse saison.

Comment se compose ce circuit, en nombre de jours dans chacune des villes?

Exercice 3 : On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. On note m_{ij} les coefficients de la matrice M . Donner m_{21} et m_{13}

2. Calculer le produit $M \times N$

3. Déterminer la valeur de a pour que $M \times N = 3I$

Exercice 4 :

1. Donner la formule du binôme de Newton pour développer $(a + b)^n$ où a et b sont des réels et n un entier naturel.

2. Rappeler la formule pour calculer $\binom{n}{k}$ pour n et k des entiers avec $k \leq n$.

3. Donner $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ et $\binom{5}{5}$.

4. En déduire le développement de $A(x) = (2 + x)^5$

Exercice 5 :

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide. Supposons que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0.9;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0.95;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0.2.

Choisissons au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, notons R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n -ième semaine ». Pour tout entier naturel n non nul, notons r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine. Nous avons alors $r_n = P(R_n)$.

1. Montrer que $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$
2. Déterminer ℓ telles que $\ell = 0,75\ell + 0,2$
3. Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = r_n - \ell$. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. Vous donnerez la raison et le premier terme.
4. Donner la forme explicite de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Donner la forme explicite de r_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Donner la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 6 :

Considérons la fonction f définie, pour tout x , par $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$.

Appelons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f .
Calculer de même la dérivée f'' de f' . Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$.
- (b) Étudier la convexité de f . Vérifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.
- (c) Déterminer le sens de variation de f' . Vérifier que $f'(0) = \frac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (b) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées en 2.a).
3. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- (b) Justifier de même que la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
- (c) Notons A le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A .
- (d) Tracer sur une même figure les droites $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{T})$ ainsi que l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution α .
- (b) Justifier que $-1 \leq \alpha \leq 0$

Exercice 7 :**Première partie - Étude de A et de ses puissances**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et notons I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A - I$ puis $(A - I)^2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels à déterminer.
3. Exprimer l'inverse de A sous la forme d'une matrice.
4. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
5. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = nA - (n-1)I$$

$$6. \text{ Calculer } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \text{ Déterminer des réels } a \text{ et } b \text{ non nuls tels que } \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième partie - Étude de suites

Considérons trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que les matrice colonnes :

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

telles que pour tout :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$$

Ainsi $X_1 = AX_0 + B$.

$$8. \text{ Calculer les trois coefficients de la matrice colonne } X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ t_1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \text{ Déterminer un réel } \omega \text{ tel que } F = \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ vérifie } F = AF + B.$$

$$10. \text{ Démontrer que, pour tout } n \in \mathbb{N}, X_{n+1} - F = A(X_n - F).$$

$$11. \text{ En déduire que pour tout } n \in \mathbb{N}, X_n - F = A^n(X_0 - F).$$

12. Donner, à l'aide des résultats obtenus dans les deux parties de l'exercice, le terme général de chaque suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Corrigé du DS1 : ECT2

Corrigé de l'exercice 1 :

Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n : \langle A^n = PD^n P^{-1} \rangle$.

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$A^0 = I$ et $PD^0 P^{-1} = PIP^{-1} = I$ car l'inverse de P est P^{-1}

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $A^n = PD^n P^{-1}$ et nous voulons montrer : $A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$

D'après l'hypothèse de l'énoncé : $A = PDP^{-1}$. Nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1} \times PD^n P^{-1} = PD I_3 D^n P^{-1} = PD \times D^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A^n = PD^n P^{-1}$.

Corrigé de l'exercice 2 :

1. (a) Nous avons

$$P \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Les termes de la matrice représentent pour un circuit de 3 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C :

- il dure 10 jours
- son prix en haute saison est 18 500 €
- son prix en basse saison est 12 000 €

- (b) Le prix en basse saison est de $12 \times 100 = 1\,200$

Monsieur Martin disposant de 1 500 € pourra réaliser son voyage en basse saison mais pas en haute saison car alors le prix des de 18 500€.

2. (a) Nous avons :

$$Q \times P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) $P \times X = Y$ soit $Q \times P \times X = Q \times Y$ alors $I \times X = Q \times Y$ donc $X = Q \times Y$.

3. Un circuit complet de 12 jours est possible au tarif de 2 250 € en haute saison et 1 400 € en

basse saison correspond à $Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 22,5 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\text{On a } X = Q \times Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 22,5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ce circuit se compose de 5 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C

Corrigé de l'exercice 3 :

1. $m_{21} = -1$ et $m_{13} = -1$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
 M \times N &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2a+1 \times 0 - 1 \times (-1) & -2 + (-1) + (-1) \times (-1) & 0 + 1 - 1 \\ -a + 0 + (-1) \times (-1) & (-1) \times (-1) + 1 + (-1) \times (-1) & 0 + 1 - 1 \times 1 \\ a + 2 \times 0 + 1 \times (-1) & -1 + 2 - 1 & 1 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2a+1 & 0 & 0 \\ -a+1 & 3 & 0 \\ a-1 & 0 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$3. M \times N = 3I \text{ si et seulement si } \begin{cases} 2a+1=3 \\ -a+1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \text{ c'est à dire si } \boxed{a=1}$$

Corrigé de l'exercice 4 :

1. La formule du binôme de Newton pour développer $(a+b)^n$ où a et b sont des réels et n un entier naturel est :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Nous avons $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour n et k des entiers avec $k \leq n$.

3. Nous avons $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$,

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \times 5}{2} = \boxed{10}$$

puis $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{5} = 1$.

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
 A(x) &= 2^5 + 5 \times 2^4 \times x + 10 \times 2^3 \times x^2 + 10 \times 2^2 \times x^3 + 5 \times 2 \times x^4 + x^5 \\
 &= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5 = \boxed{x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32}.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5 :

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $f(x) = \frac{1}{u(x)} + x$, avec $u(x) = 1 + e^x$.
Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} + 1 = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = 1 - \frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= e^x & u'(x) &= e^x \\
 v(x) &= (-1 + e^x)^2 & v'(x) &= 2e^x(1 + e^x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 - \frac{e^x \times (1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{-e^x \times (1+e^x) \times ((1+e^x) - 2e^x)}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{-e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}
 \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

- (b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors $e^x > 0$ et $1+e^x > 1 > 0$ donc $(1+e^x)^3 > 0$. Il me reste à étudier le signe de $(e^x - 1)$:

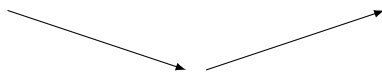
$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

Ainsi j'en déduis que :

- f est **concave** sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, car $f''(x)$ y est négative,
- f est **convexe** sur l'intervalle $[0, +\infty[$, car $f''(x)$ y est positive.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien **un point d'inflexion**, de coordonnées $(0, f(0)) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, car $f(0) = \frac{1}{1+e^0} + 0 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

- (c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f'' . J'ai déjà étudié le signe de f'' , je peux directement établir le tableau de signe de $f''(x)$ et les de variations de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'			

J'évalue $f'(x)$ en $x = 0$: $f'(0) = \frac{1+e^0+e^{2 \times 0}}{(1+e^0)^2} = \frac{1+1+1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$. Je retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du **minimum** de la fonction f' et ce minimum est positif. J'en déduis donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Je rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Alors

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = \boxed{+\infty}.$$

Puis

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = \boxed{-\infty}.$$

- (b) Je connais les limites de f et je sais que la fonction est strictement croissante. Je dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) Je commence par calculer la différence : $f(x) - x = \frac{1}{1+e^x} + x - x = \frac{1}{1+e^x}$.

Or j'ai déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question 2.(a) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- (b) Je raisonne de la même manière qu'à la question précédente. Je commence par calculer la différence :

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{1+e^x} + x - x - 1 = \frac{1}{1+e^x} - 1.$$

Or j'ai déjà calculé la limite de $\frac{1}{1+e^x}$ en $-\infty$ à la question 2.(a). Alors par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x + 1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

- (c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$. Je connais déjà $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{3}{4}$. Ainsi

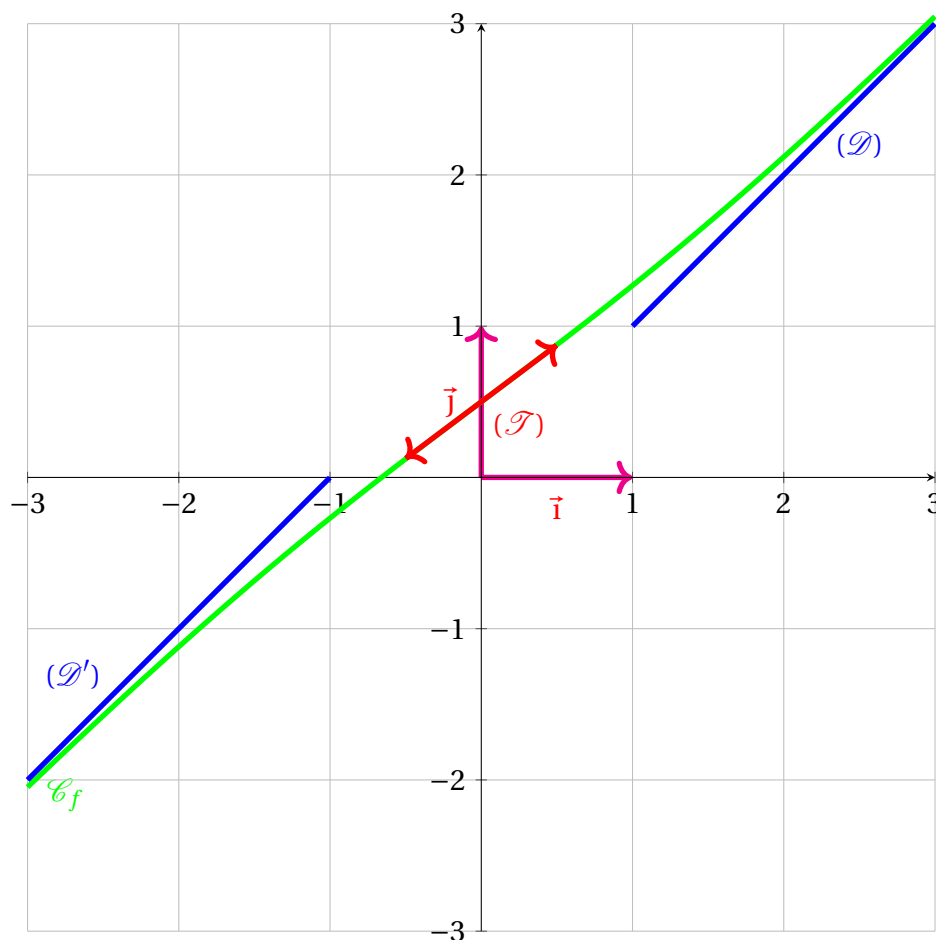
l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

- (d) Le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$ est donné à la fin de l'exercice.

4. (a) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question 1(c)) sur $\mathbb{R}$. J'ai aussi montré que la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi comme $0 \in]-\infty, +\infty[$, par le théorème de la bijection monotone, je peux déduire qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α , de l'équation $f(x) = 0$.

- (b) Je calcule $f(-1)$ et $f(0)$: $f(-1) = \frac{1}{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e}{1+e} - 1 = -\frac{e}{1+e} < 0$ et $f(0) = \frac{1}{2} > 0$.

Comme $f(\alpha) = 0$, que $f(-1) \leq 0 \leq f(0)$ et que f est croissante, j'en déduis bien que $-1 \leq \alpha \leq 0$.



Corrigé de l'exercice 6 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ L'ensemble $\{R_n ; \overline{R_n}\}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$$

Par la formule du conditionnement nous avons :

$$r_{n+1} = P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times P(\overline{R_n}).$$

Or $P(R_n) = r_n$ et $P(\overline{R_n}) = 1 - P(R_n) = 1 - r_n$ et $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,95$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,2$. D'où :

$$r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2(1 - r_n) = 0,95r_n + 0,2 - 0,2r_n = 0,75r_n + 0,2$$

Nous avons bien pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

2. Nous avons

$$\ell = 0,75\ell + 0,2 \iff 0,25\ell = 0,2 \iff \ell = \frac{0,2}{0,25} = 0,8$$

La solution est $\ell = 0,8$.

3. Comme $w_n = r_n - \ell$, alors $r_n = w_n + \ell$. D'où :

$$w_{n+1} = r_{n+1} - \ell = 0,75r_n + 0,2 - 0,8 = 0,75(w_n + 0,8) - 0,6 = 0,75w_n + 0,6 - 0,6 = 0,75w_n$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $0,75$ et le premier terme $w_1 = r_1 - 0,8 = 0,9 - 0,8 = 0,1$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons $w_n = w_1 q^{n-1} = 0,1 \times 0,75^{n-1}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons $r_n = w_n + \ell = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

6. Comme $-1 < 0,75 < 1$ la suite géométrique $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de raison $0,75$ converge vers 0 et par somme de limites, la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $\boxed{0,8}$.

Corrigé de l'exercice 7 :

(BSB25)

1. Nous avons :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 4 & 4 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

puis nous avons

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+0 & 1-1+0 & 0 \\ -1+1+0 & -1+1+0 & 0 \\ -4+4+0 & -4+4+0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. D'après la question précédente $O_3 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = A(A - 2I) + I$. Nous avons donc $A(2I - A) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \alpha A + \beta I$ avec $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

3. Nous avons :

$$A^{-1} = -A + 2I = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0+2 \times 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2+2 \times 1 & 0 \\ -4 & -4 & -1+2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Comme $(A - I)^2 = O_3$ alors $A^2 - 2A + I = O_3$, soit $\boxed{A^2 = 2A - I}$.

5. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n$: « $A^n = nA - (n-1)I$ ».

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$A^0 = I$ et $0A - (0-1)I = I$, d'où $A^0 = 0A - (0-1)I$.

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $A^n = nA - (n-1)I$ et nous voulons montrer : $A^{n+1} = (n+1)A - nI$

Nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(nA - (n-1)I) = nA^2 - (n-1)A$$

En utilisant la question précédente, $A^2 = 2A - I$, nous en déduisons que :

$$A^{n+1} = 2nA - nI - (n-1)A = (2n - n + 1)A + 2A - nI - nA = (n+1)A - nI.$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\boxed{A^n = nA - (n-1)I}$.

6. Nous avons :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Nous avons

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a+2b \\ 4a+4b \end{pmatrix}$$

Donc si $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ alors par identification des coefficients, nous obtenons :

$$\begin{cases} -b = a \\ a + 2b = b \\ 4a + 4b = 0 \end{cases} \iff a = -b$$

Nous en déduisons donc qu'une solution non nulle est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie - Étude de suites

8. Nous avons

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = AX_0 + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+4 \\ 4+8+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

9. Nous avons

$$F = AF + B \iff \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega - 2 \\ 4\omega - 4 + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega - 2 \\ 4\omega - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega - 1 \\ 4\omega + 3 \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients donc :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ -1 = \omega - 1 \\ 3 = 4\omega + 3 \end{cases} \iff \omega = 0$$

10. Nous avons $X_{n+1} - F = AX_n + B - F$. Or $F = AF + B$, d'où

$$X_{n+1} - F = AX_n + B - F \iff X_{n+1} - F = AX_n + B - AF - B = A(X_n - F)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} - F = A(X_n - F)$.

11. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n$: « $X_n - F = A^n(X_0 - F)$ ».

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$$A^0(X_0 - F) = I(X_0 - F) = X_0 - F$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $X_n - F = A^n(X_0 - F)$ et nous voulons montrer : $X_{n+1} - F = A^{n+1}(X_0 - F)$.

Nous avons par la question précédente $X_{n+1} - F = A(X_n - F)$ et par hypothèse de récurrence $X_n - F = A^n(X_0 - F)$. D'où :

$$X_{n+1} - F = A(X_n - F) = A(A^n(X_0 - F)) = A \times A^n(X_0 - F) = A^{n+1}(X_0 - F).$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n - F = A^n(X_0 - F)$.

12. Nous avons alors :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = A^n(X_0 - F) + F = (nA - (n-1)I) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (nA - (n-1)I) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons les coefficients de la matrice $nA - (n-1)I$:

$$nA - (n-1)I = n \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} - (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n & 0 \\ n & 2n+1-n & 0 \\ 4n & 4n & n+1-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n & 0 \\ n & n+1 & 0 \\ 4n & 4n & 1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons finalement que :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n & 0 \\ n & n+1 & 0 \\ 4n & 4n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n-3n \\ n+3n+3 \\ 4n+12n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4n \\ 4n+2 \\ 16n+3 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = 1 - 4n}, \boxed{w_n = 4n + 2} \text{ et } \boxed{t_n = 16n + 3}.$$