

Nom :

Devoir numéro 1 de mathématiques de ECT2 5/2 : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits. Toutes vos réponses doivent être justifiées, de manière claire et précise. Ce sujet comporte pages. Dans le cas où vous repéreriez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez très lisiblement sur votre copie, proposerez la correction et poursuivrez l'épreuve en conséquence. De même si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement. Bon courage!

Exercice 1 :**Partie A**

Nous notons I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Nous notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer $(I_3)^2$ et A^2 .

(b) En déduire que l'équation $M^2 = I_3$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet au moins quatre solutions.

2. Soit λ un réel strictement positif. Nous définissons les matrices N et T par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $N^2 = 0$.

(b) Déterminer deux réels a et b tels que $T = aI_3 + bN$.

(c) Soient x et y deux réels. Nous posons $M = xI_3 + yN$. Calculer M^2 .

(d) En déduire que l'équation $M^2 = T$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet exactement deux solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

Partie B

Nous notons $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice B , et préciser pour chacun la valeur propre associée.

4. Nous considérons le script Python suivant :

```
1 import numpy as np
  I=np.eye (3)
3 B=np. array ([[ -1 ,4 , -1] ,[ -2 ,5 ,2] ,[0 ,0 , -2]])
  P=np. array ([[1 ,2 ,1] ,[0 ,1 ,1] ,[1 ,0 ,0]])
5 Q=np. array ([[0 ,0 ,1] ,[1 , -1 , -1] ,[ -1 ,2 ,1]])
  R=np.dot(P,Q)-I
7 S=np.dot(Q,np.dot(B,P))
  print (R)
9 print (S)
```

À son exécution, nous obtenons

```

1  [[ 0. 0. 0.]
   [ 0. 0. 0.]
3  [ 0. 0. 0.]]
   [[-2 0 0]
5  [ 0 1 0]
   [ 0 0 3]]

```

Que peut-on en conjecturer sur la matrice P ? sur la matrice D ?

5. Nous supposons qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = D$ et nous notons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Justifier que $DM = MD$.
 - (b) Justifier que $DMV = -2MV$.
 - (c) Notons $MV = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que $-2b = b$ et que $-2c = 3c$. En déduire que $MV = aV$.
 - (d) Calculer M^2V de deux manières différentes et aboutir à une contradiction.
6. Que peut-on conclure sur l'équation $M^2 = D$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
7. Admettons les conjectures effectuées à la question 4.
 - (a) Montrer que si une matrice M vérifie l'équation $M^2 = B$, alors on a $(QMP)^2 = D$.
 - (b) Que peut-on en conclure sur l'équation $M^2 = B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2 :

Considérons la fonction f définie, pour tout x , par $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$.

Appelons $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f .
Calculer de même la dérivée f'' de f' . Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$.
- (b) Étudier la convexité de f . Vérifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.
- (c) Déterminer le sens de variation de f' . Vérifier que $f'(0) = \frac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (b) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites calculées en 2.a).
3. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
- (b) Justifier de même que la droite $(\mathcal{D}')$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
- (c) Notons A le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A .
- (d) Tracer sur une même figure les droites $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{T})$ ainsi que l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution α .
- (b) Justifier que $-1 \leq \alpha \leq 0$

Exercice 3 :**Première partie - Étude de A et de ses puissances**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et notons I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A - I$ puis $(A - I)^2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels à déterminer.
3. Exprimer l'inverse de A sous la forme d'une matrice.
4. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
5. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = nA - (n-1)I$$

$$6. \text{ Calculer } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \text{ Déterminer des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deuxième partie - Étude de suites

Considérons trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi que les matrice colonnes :

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$$

telles que pour tout :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$$

Ainsi $X_1 = AX_0 + B$.

8. Calculer les trois coefficients de la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$.
9. Déterminer un réel ω tel que $F = \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie $F = AF + B$.
10. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} - F = A(X_n - F)$.
11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n - F = A^n(X_0 - F)$.
12. Donner, à l'aide des résultats obtenus dans les deux parties de l'exercice, le terme général de chaque suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Corrigé du DS1 : ECT2 5/2

Corrigé de l'exercice 1 :

Partie A

1. (a) Nous avons $(I_3)^2 = I_3$, et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi $(I_3)^2 = A^2 = I_3$.

- (b) Nous en déduisons les quatre égalités suivantes : $(I_3)^2 = I_3$, $(-I_3)^2 = (-1)^2 I_3^2 = I_3^2$, $A^2 = I_3$ et $(-A)^2 = (-1)^2 A^2 = I_3$. L'équation $M^2 = I_3$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, admet donc au moins quatre solutions : $I_3, (-I_3), A, (-A)$.

2. (a) Nous avons : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $N^2 = 0$.

Les détails de calcul ne sont pas attendus.

- (b) Nous avons $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I_3 + N$. Ainsi $T = \lambda I_3 + N$.

- (c) Comme I_3 et N commutent, nous avons :

$$M^2 = (xI_3 + yN) \times (xI_3 + yN) = (xI_3)^2 + 2(xI_3)(yN) + (yN)^2 = x^2 I_3 + 2xyN$$

Donc $M^2 = x^2 I_3 + 2xyN$.

- (d) Soient x et y deux réels et $M = xI_3 + yN$.

$$\begin{aligned} M^2 = T &\iff x^2 I_3 + 2xyN = aI_3 + bN \\ &\iff \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x^2 = \lambda \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \end{cases} \\ &\iff M = \sqrt{\lambda} I_3 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} N \quad \text{ou} \quad M = -\sqrt{\lambda} I_3 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} N \end{aligned}$$

Finalement, l'équation $M^2 = T$ admet bien exactement **deux** solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

Partie B

3. • Nous avons $X_1 \neq 0$ et $BX_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2X_1$.

X_1 est donc vecteur propre de B associé à la valeur propre -2 .

- $X_2 \neq 0$ et $BX_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_2$.

X_2 est donc vecteur propre de B associé à la valeur propre 1 .

- $X_3 \neq 0$ et $BX_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3X_3.$

X_3 est donc vecteur propre de B associé à la valeur propre 3.

4. La ligne 6 du script Python calcule la matrice $R = PQ - I_3$ et le résultat obtenu (affiché grâce à la ligne 8) donne la matrice nulle.

Nous pouvons conjecturer que $PQ = I_3$ c'est-à-dire que P est inversible et $P^{-1} = Q$.

La ligne 7 du script Python calcule le produit matriciel $S = QBP$ et le résultat obtenu (affiché grâce à la ligne 9) donne la matrice diagonale D .

Nous pouvons donc conjecturer que $\boxed{QBP = P^{-1}BP = D}$, et que B est diagonalisable.

5. (a) $DM = M^2M$ par hypothèse Donc $DM = M^3 = MM^2 = MD$. Ainsi $\boxed{DM = MD}$.
 (b) Nous avons : $DMV = MDV$ par question 5(a). Or

$$DV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2V$$

D'où $DMV = MDV = M(-2V) = -2MV$. Ainsi $\boxed{DMV = -2MV}$.

- (c) D'une part,

$$DMV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 3c \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$-2V = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix}.$$

Or, par question 5(b), $DMV = -2MV$, d'où les trois égalités :

$$\boxed{-2a = -2a, b = -2b \text{ et } 3c = -2c}.$$

L'équation $b = -2b$ donne $b = 0$ et l'équation $3c = -2c$ donne $c = 0$. Nous en déduisons

donc que $\boxed{MV = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aV}.$

- (d) D'une part, $M^2V = MMV = M(aV) = aMV = a^2MV$.

D'autre part, $M^2V = DV = -2V$ car M est solution de l'équation $M^2 = D$ et par question 5(b).

Nous en déduisons donc que $\boxed{a^2V = -2V}$ d'où $a^2 = -2$ (car $V \neq 0$). Or c'est impossible puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

6. Nous avons ainsi démontré par l'absurde que l'équation $M^2 = D$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ n'admet aucune solution.
 7. (a) Soit M une matrice qui vérifie l'équation $M^2 = B$. Alors, en admettant les deux conjectures $Q = P^{-1}$ et $QBP = D$, on a :

$$(QMP)^2 = QMPQMP = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}BP = D.$$

Nous avons donc bien $\boxed{(QMP)^2 = D}$.

- (b) Supposons que l'équation $M^2 = B$ admette une solution notée M_1 . Alors on a $(QM_1P)^2 = D$, c'est-à-dire QM_1P solution de l'équation $M^2 = D$.

Or d'après la question 6, cette équation n'admet pas de solution. Donc l'équation $M^2 = B$ **n'admet pas non plus de solution**.

Corrigé de l'exercice 2 :

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $f(x) = \frac{1}{u(x)} + x$, avec $u(x) = 1 + e^x$.
Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} + 1 = 1 - \frac{e^x}{(-1 + e^x)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = 1 - \frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x & u'(x) &= e^x \\ v(x) &= (-1 + e^x)^2 & v'(x) &= 2e^x(1 + e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 - \frac{e^x \times (1 + e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1 + e^x)}{((1 + e^x)^2)^2} = \frac{-e^x \times (1 + e^x) \times ((1 + e^x) - 2e^x)}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{-e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3} \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$.

- (b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors $e^x > 0$ et $1 + e^x > 1 > 0$ donc $(1 + e^x)^3 > 0$. Il me reste à étudier le signe de $(e^x - 1)$:

$$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

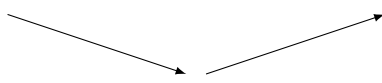
Ainsi j'en déduis que :

- f est **concave** sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, car $f''(x)$ y est négative,
- f est **convexe** sur l'intervalle $[0, +\infty[$, car $f''(x)$ y est positive.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien **un point d'inflexion**, de coordonnées $(0, f(0)) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, car

$$f(0) = \frac{1}{1 + e^0} + 0 = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f'' .
J'ai déjà étudié le signe de f'' , je peux directement établir le tableau de signe de $f''(x)$ et les de variations de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'			

J'évalue $f'(x)$ en $x = 0$: $f'(0) = \frac{1 + e^0 + e^{2 \times 0}}{(1 + e^0)^2} = \frac{1 + 1 + 1}{(1 + 1)^2} = \frac{3}{4}$. Je retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du **minimum** de la fonction f' et ce minimum est positif. J'en déduis donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Je rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Alors

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = \boxed{+\infty}.$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = \boxed{-\infty}.$$

(b) Je connais les limites de f et je sais que la fonction est strictement croissante. Je dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

3. (a) Je commence par calculer la différence : $f(x) - x = \frac{1}{1+e^x} + x - x = \frac{1}{1+e^x}$.

Or j'ai déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question 2.(a) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

(b) Je raisonne de la même manière qu'à la question précédente. Je commence par calculer la différence :

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{1+e^x} + x - x - 1 = \frac{1}{1+e^x} - 1.$$

Or j'ai déjà calculé la limite de $\frac{1}{1+e^x}$ en $-\infty$ à la question 2(a). Alors par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x + 1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

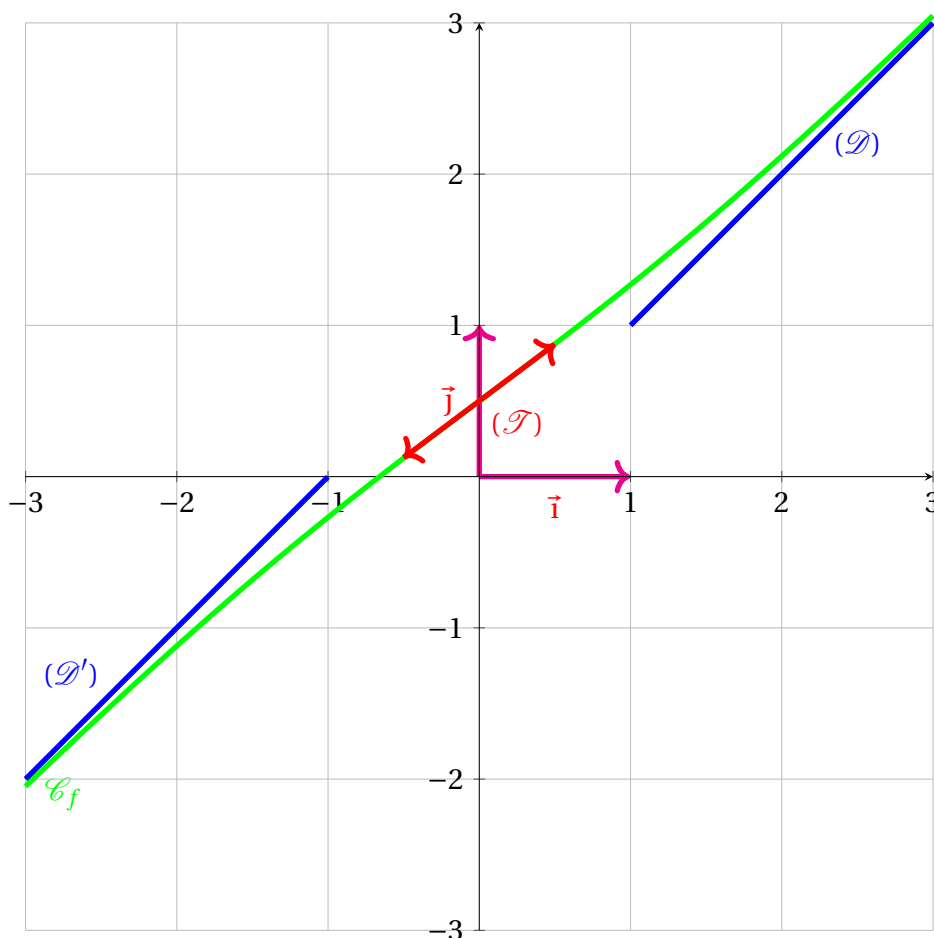
(c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$. Je connais déjà $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{3}{4}$. Ainsi

l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

(d) Le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$ est donné à la fin de l'exercice.

4. (a) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question 1(c)) sur $\mathbb{R}$. J'ai aussi montré que la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$. Ainsi comme $0 \in]-\infty, +\infty[$, par le théorème de la bijection monotone, je peux déduire qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α , de l'équation $f(x) = 0$.

- (b) Je calcule $f(-1)$ et $f(0)$: $f(-1) = \frac{1}{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e}{1+e} - 1 = -\frac{e}{1+e} < 0$ et $f(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Comme $f(\alpha) = 0$, que $f(-1) \leq 0 \leq f(0)$ et que f est croissante, j'en déduis bien que $-1 \leq \alpha \leq 0$.



Corrigé de l'exercice 3 :

(BSB25)

1. Nous avons :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

puis nous avons

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+0 & 1-1+0 & 0 \\ -1+1+0 & -1+1+0 & 0 \\ -4+4+0 & -4+4+0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. D'après la question précédente $O_3 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = A(A - 2I) + I$. Nous avons donc $A(2I - A) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \alpha A + \beta I$ avec $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.
3. Nous avons :

$$A^{-1} = -A + 2I = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0+2 \times 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2+2 \times 1 & 0 \\ -4 & -4 & -1+2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Comme $(A - I)^2 = O_3$ alors $A^2 - 2A + I = O_3$, soit $A^2 = 2A - I$.

5. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n$: « $A^n = nA - (n-1)I$ ».

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$$A^0 = I \text{ et } 0A - (0-1)I = I, \text{ d'où } A^0 = 0A - (0-1)I.$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $A^n = nA - (n-1)I$ et nous voulons montrer : $A^{n+1} = (n+1)A - nI$

Nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A(nA - (n-1)I) = nA^2 - (n-1)A$$

En utilisant la question précédente, $A^2 = 2A - I$, nous en déduisons que :

$$A^{n+1} = 2nA - nI - (n-1)A = (2n - n + 1)A + 2A - nI - nA = (n+1)A - nI.$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A^n = nA - (n-1)I$.

6. Nous avons :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Nous avons

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a+2b \\ 4a+4b \end{pmatrix}$$

Donc si $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ alors par identification des coefficients, nous obtenons :

$$\begin{cases} -b = a \\ a+2b = b \\ 4a+4b = 0 \end{cases} \iff a = -b$$

Nous en déduisons donc que la solution est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deuxième partie - Étude de suites

8. Nous avons

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = AX_0 + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+4 \\ 4+8+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

9. Nous avons

$$F = AF + B \iff \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega-2 \\ 4\omega-4+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega-2 \\ 4\omega-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega-1 \\ 4\omega+3 \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients donc :

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ -1 = \omega-1 \\ 3 = 4\omega+3 \end{cases} \iff \omega = 0$$

10. Nous avons $X_{n+1} - F = AX_n + B - F$. Or $F = AF + B$, d'où

$$X_{n+1} - F = AX_n + B - F \iff X_{n+1} - F = AX_n + B - AF - B = A(X_n - F)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_{n+1} - F = A(X_n - F)}$.

11. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n : \ll X_n - F = A^n(X_0 - F) \gg$.

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$$A^0(X_0 - F) = I(X_0 - F) = X_0 - F$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $X_n - F = A^n(X_0 - F)$ et nous voulons montrer : $X_{n+1} - F = A^{n+1}(X_0 - F)$.

Nous avons par la question précédente $X_{n+1} - F = A(X_n - F)$ et par hypothèse de récurrence $X_n - F = A^n(X_0 - F)$. D'où :

$$X_{n+1} - F = A(X_n - F) = A(A^n(X_0 - F)) = A \times A^n(X_0 - F) = A^{n+1}(X_0 - F).$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\boxed{X_n - F = A^n(X_0 - F)}$.

12. Nous avons alors :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = A^n(X_0 - F) + F = (nA - (n-1)I) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (nA - (n-1)I) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminons les coefficients de la matrice $nA - (n-1)I$:

$$nA - (n-1)I = n \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} - (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n & 0 \\ n & 2n+1-n & 0 \\ 4n & 4n & n+1-n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n & 0 \\ n & n+1 & 0 \\ 4n & 4n & 1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons finalement que :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & -n & 0 \\ n & n+1 & 0 \\ 4n & 4n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n-3n \\ n+3n+3 \\ 4n+12n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4n \\ 4n+2 \\ 16n+3 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = 1 - 4n}, \boxed{w_n = 4n + 2} \text{ et } \boxed{t_n = 16n + 3}.$$