

Chapitre 2 : couples de variables aléatoires

Dans tout ce chapitre Ω désigne un univers **fini**. Ainsi les variables aléatoires réelles considérées ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

1 Couples de variables aléatoires

1.1 Définition

Certaines situations sont naturellement décrites par la donnée d'un couple de variables aléatoires. Par exemple, en météorologie, nous pouvons s'intéresser au couple formé par la donnée de la température (T) et de la pression (P) atmosphériques. Nous sommes ainsi amenés à étudier les deux paramètres simultanément, donc à regarder le couple $(T; P)$, qui est un **couple de variables aléatoires**.

Définition 1 :

Appelons **couple de variables aléatoires**, tout couple (X, Y) où X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω .

Définition 2 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Appelons **loi conjointe du couple** (X, Y) la donnée de toutes les probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Exemple 1 : Considérons dans le plan les points de coordonnées entières situés dans la zone $\mathcal{B}$, définie par

$$\mathcal{B} = \{(x; y) \text{ tel que } (x; y) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}.$$

Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir l'un de ces points au hasard (tous les choix de points dans $\mathcal{B}$ étant équiprobables). Définissons la variable aléatoire discrète Z qui est formée du couple de coordonnées du point choisi.

→ Détermination de la loi de Z :

Valeurs de Z	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

→ La variable aléatoire Z est appelée couple des variables aléatoires X et Y .

nous pouvons présenter sa loi de manière à faire apparaître les rôles joués par X et Y plus clairement :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

→ Nous pouvons aussi déterminer les lois de X et de Y à partir de celle de Z :

Par exemple,

$$P(Y = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) = P(Z = (1; 1)) + P(Z = (2; 1)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

et

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 1] \cap [Y = 3]) \\ &= P(Z = (1; 1)) + P(Z = (1; 2)) + P(Z = (1; 3)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De manière plus rapide, en faisant les additions en colonne, nous obtenons la loi de Y et en additionnant les lignes nous obtenons la loi de X

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

→ ces deux lois sont appelées **lois marginales du couple** $(X; Y)$.



vous ferez attention au fait que la loi de X est dans la dernière colonne bien que les valeurs prises par X sont en lignes...

→ ces deux lois sont appelées **lois marginales du couple** $(X; Y)$.

Définition 3 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi de X est appelée **première loi marginale du couple** et celle de Y est appelée **deuxième loi marginale du couple**.

Proposition 1 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω .

— Pour tout réel $x \in X(\Omega)$,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

— Pour tout réel $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

1.2 loi conditionnelle.

Définition 4 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, Appelons loi de X **conditionnellement à l'événement** $[Y = y]$ la donnée, pour tout $x \in X(\Omega)$, de

$$P_{[Y=y]}(X = x) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P(Y = y)}$$

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, $P(Y = 1) \neq 0$. Déterminer alors la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$. Nous avons :

$$P_{[Y=1]}(X = 1) = \frac{P([Y = 1] \cap [X = 1])}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Puis

$$P_{[Y=1]}(X = 2) = \frac{P([Y = 1] \cap [X = 2])}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Proposition 2 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Si nous connaissons la loi marginale de Y , ainsi que toutes les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tous les $y \in Y(\Omega)$, alors la loi de X est déterminée par :

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) \times P_{[Y=y]}(X = x).$$

Exemple 3 :

Nous avons deux jetons numérotés de 1 à 3. Nous tirons deux jetons l'un après l'autre en remettant le premier jeton tiré.

— M le maximum des deux jetons tirés et Y prend la valeur du premier des deux jetons tirés :

$P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ car il y a trois tirages sur neuf tirages qui commencent par 1

$P(Y = 2) = \frac{1}{3}$ car il y a trois tirages sur neuf tirages qui commencent par 2.

$P(Y = 3) = \frac{1}{3}$ car il y a trois tirages sur neuf tirages qui commencent par 3.

$P_{[Y=1]}(M = 1) = \frac{1}{3}$ car il n'y a qu'un tirage qui commence par 1 et dont le maximum est 1, parmi les trois qui commencent par 1.

$P_{[Y=1]}(M = 2) = \frac{1}{6}$ car il n'y a qu'un tirage qui commence par 1 et dont le maximum est 2.

$P_{[Y=1]}(M = 3) = \frac{1}{6}$ car il n'y a qu'un tirage qui commence par 1 et dont le maximum est 3.

$P_{[Y=2]}(M = 1) = 0$ car il n'y a aucun tirage qui commence par 2 et dont le maximum est 1 (le maximum est au moins 2).

$P_{[Y=2]}(M = 2) = \frac{2}{3}$ car deux couples peuvent avoir deux comme maximum et commencer par 2 qui sont (2, 1) et (2, 2).

$P_{[Y=2]}(M=3) = \frac{1}{3}$ car il n'y a qu'un tirage qui commence par 2 et dont le maximum est 3.

$$P_{[Y=3]}(M=1) = 0$$

$$P_{[Y=3]}(M=2) = 0$$

$$P_{[Y=3]}(M=3) = 1$$

Et donc en considérant le s.c.e. (système complet d'événements) $\{[Y=1], [Y=2], [Y=3]\}$, par la formule des probabilités totales :

$$P(M=1) = P([Y=1] \cap [M=1]) + P([Y=2] \cap [M=1]) + P([Y=3] \cap [M=1])$$

Et par la formule du conditionnement :

$$\begin{aligned} P(M=1) &= P(Y=1) \times P_{[Y=1]}(M=1) + P(Y=2) \times P_{[Y=2]}(M=1) + P(Y=3) \times P_{[Y=3]}(M=1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités totales :

$$P(M=2) = P([Y=1] \cap [M=2]) + P([Y=2] \cap [M=2]) + P([Y=3] \cap [M=2])$$

Et par la formule du conditionnement :

$$\begin{aligned} P(M=2) &= P(Y=1) \times P_{[Y=1]}(M=2) + P(Y=2) \times P_{[Y=2]}(M=2) + P(Y=3) \times P_{[Y=3]}(M=2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités totales :

$$P(M=3) = P([Y=1] \cap [M=3]) + P([Y=2] \cap [M=3]) + P([Y=3] \cap [M=3])$$

Et par la formule du conditionnement :

$$\begin{aligned} P(M=3) &= P(Y=1) \times P_{[Y=1]}(M=3) + P(Y=2) \times P_{[Y=2]}(M=3) + P(Y=3) \times P_{[Y=3]}(M=3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

1.3 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 5 : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de valeurs respectives $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, et $(y_1; y_2; \dots; y_p)$.

Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Exemple 4 :

Tester l'indépendance dans les deux exemples du cours.

Exemple 1

Pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X=i) \times P(Y=j) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Donc $P([X=i] \cap [Y=j]) \neq P(X=i) \times P(Y=j)$ et les variables X et Y sont dépendantes. Exemple 2

$P([Y=2] \cap [M=1]) = 0$, Or $P(Y=2) \times P(M=1) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \neq 0$, donc Y et M ne sont pas indépendantes.

Proposition 3 :

Si une des deux variables aléatoires X ou Y est constante, alors X et Y sont indépendantes.

2 Espérance

2.1 Linéarité de l'espérance

Proposition 4 :

Considérons deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant une espérance, alors

- ♦ $X + Y$ admet l'espérance $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- ♦ $X - Y$ admet l'espérance $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.
- ♦ pour a réel, $E(aX) = aE(X)$

Exemple 5 : Soient X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; 9 \rrbracket$ et Y une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{4}\right)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = 5X + Y$.

$$E(X) = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$E(Y) = np = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$E(Z) = 5 \times 5 + 2 = 27.$$

2.2 Espérance d'un produit

Proposition 5 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . Alors l'espérance du produit est définie grâce à la loi conjointe par

$$E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\omega) \times Y(\Omega)} xyP([X = x] \cap [Y = y])$$

Exemple 6 :

Reprenons le second exemple du cours. Nous avons trois jetons numérotés de 1 à 3. Nous tirons deux jetons l'un après l'autre en remettant le premier jeton tiré.

X le maximum des deux jetons tirés et Y prend la valeur du premier des deux jetons tirés :

$M \backslash Y$	1	2	3	$P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Donner :

$$E(MY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{9} + 0 + 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times 1 \times \frac{1}{9} + 3 \times 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times 3 \times \frac{3}{9} = \frac{47}{9}.$$

Proposition 6 : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur Ω . Alors

$$E(XY) = E(X) \times E(Y).$$

Exemple 7 :

Avec le premier exemple du cours et sachant que X et Y sont indépendants calculer $E(XY)$ de deux manières différentes. Je vous redonne la loi conjointe :

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$E(X) = \frac{3}{2} \text{ et } E(Y) = \frac{1+3}{2}$$

$$\text{Comme } X \text{ et } Y \text{ sont indépendants } E(XY) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

Et le calcul direct donne

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times 3 \times \frac{1}{6} + 2 \times 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times 2 \times \frac{1}{6} + 2 \times 3 \times \frac{1}{6} = \frac{18}{6} = 3$$



L'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$ peut être vérifiée sans que les variables aléatoires X et Y ne soient indépendantes.

3 Covariance et corrélation

Définition 6 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Appelons **covariance** de X et Y , le réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, défini par

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Théorème 7 :

(Formule de König-Huygens)

$$\text{Cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Méthode : Calculer directement une covariance. Pour calculer la covariance de deux variables aléatoires X et Y :

1. Calculons les trois espérances $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$ si ce n'est pas déjà fait.
2. Appliquons la formule de König-Huygens.

Exemple 8 :

Calculer la covariance avec les deux exemples du cours

Exemple 1

$$E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - \frac{3}{2} \times 2 = 0$$

Exemple 2

$\text{Cov}(M, Y) = E(MY) - E(M)E(Y)$, or :

$$E(M) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{5}{9} = \frac{22}{9}$$

Et $E(Y) = 2$ et $E(MY) = \frac{47}{9}$, d'où

$$\text{Cov}(M, Y) = \frac{47}{9} - 2 \times \frac{22}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 8 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω . Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Méthode :

Pour montrer que deux variables ne sont pas indépendantes nous pouvons calculer la covariance. Attention une covariance nulle n'implique pas X et Y indépendants.

Proposition 9 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω .

— La covariance est symétrique :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

— La covariance d'une variable aléatoire avec elle-même est égale à sa variance :

$$\text{Cov}(X, X) = V(X).$$

— Cas d'une variable aléatoire constante : si a est un réel, alors

$$\text{Cov}(X, a) = \text{Cov}(a, X) = 0$$

Proposition 10 :

(linéarité à gauche et à droite de la covariance)

Soient X, X_1, X_2, Y, Y_1 et Y_2 des variables aléatoires définies sur Ω . Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{Cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\text{Cov}(X_1, Y) + b\text{Cov}(X_2, Y)$$

et par symétrie

$$\text{Cov}(X, aY_1 + bY_2) = a\text{Cov}(X, Y_1) + b\text{Cov}(X, Y_2)$$

3.1 Variance d'une somme

Proposition 11 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω . Alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Si X et Y sont **indépendants** :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

3.2 Coefficients de corrélation

Définition 7 :

Nous appelons **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y , le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Proposition 12 :

Le coefficient de corrélation de X et Y est entre -1 et 1 .