

Exercice 1 : Un sac contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus petit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) .
2. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, Y) .
(b) En déduire la loi de Y .
(c) Peut-on obtenir la loi de X_1 de façon analogue.

Exercice 2 :

Une urne contient cinq boules numérotées 1, trois boules numérotées 2 et deux boules numérotées 3. On effectue deux tirages avec remise d'une boule de l'urne. Notons :

- X le nombre de boules numérotées 1 obtenues,
- Y le nombre de boules numérotées 2 obtenues.

1. Donner la loi de X et la loi de Y .
2. Donner l'espérance et la variance de X et de Y .
3. Déterminer la loi du couple (X, Y) ainsi que la covariance de (X, Y) .

Exercice 3 :

Soit X_1 et X_2 deux v.a.r. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

1. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont indépendants.
2. En déduire que X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$.

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On pose $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y .
2. Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 5 :

Soit X et Y deux variables aléatoires tel que X suive une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0.25$, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0.4$. Supposons que le coefficient de corrélation de X et Y soit égale à -0.3 .

1. Donner l'espérance et la variance de X et Y .
2. Donner la covariance de X et Y .
3. Donner la variance de $Z = X + Y$.

Exercice 6 : Soit X et Y deux variables aléatoires tel que X suive une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.2$ et $Z = X + Y$ suivent une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.5$. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$.

1. Donner l'espérance et la variance de X , de Y et de Z .
2. Donner la covariance de X et Y en utilisant une autre définition de la variance de Z .
3. Donner le coefficient de corrélation de X et Y .

Exercice 7 :

(concours)

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. Un joueur effectue trois tirages successifs d'une boule dans cette urne. Il remet la boule obtenue dans l'urne après chaque tirage. À partir du deuxième tirage, le joueur reçoit un point à chaque fois que la couleur obtenue à un tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Dans le cas contraire, il ne reçoit aucun point. Ainsi, si les trois tirages successifs amènent : blanc - rouge - rouge, le joueur marque un point au deuxième tirage et aucun au troisième tirage. On introduit, pour tout entier k compris entre 1 et 3, les événements

B_k : « obtenir une boule blanche au k -ième tirage » et R_k : « obtenir une boule rouge au k -ième tirage ».

1. Soit X_2 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du deuxième tirage. C'est-à-dire que X_2 est égale à 1 si le joueur marque un point lors du deuxième tirage et que X_2 est égale à 0 sinon.

(a) Justifier que

$$[X_2 = 1] = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2).$$

Calculer $P(X_2 = 1)$.

(b) Donner $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

2. Soit X_3 la variable aléatoire de Bernoulli égale au gain du joueur lors du troisième tirage.

(a) Justifier que X_3 suit la même loi que X_2 .

(b) Soit G la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages. Exprimer G en fonction de X_2 et X_3 . En déduire $E(G)$.

3. Exprimer l'événement $[X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]$ en fonction de B_1, B_2, B_3 et R_1, R_2, R_3 . En déduire que

$$P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) = \frac{2}{9}$$

4. Compléter de la même manière le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3) .

$X_2 \backslash X_3$	0	1
0		
1		$\frac{2}{9}$

5. En déduire que $\text{Cov}(X_2, X_3) = \frac{2}{81}$

6. Calculer $V(G)$.