

Interrogation de cours du 28 septembre. Sujet 1
Sans calculatrice évidemment!

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui inverser-la.
-

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui inverser-la.

3. Inverser en utilisant la méthode de Gauss :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Interrogation de cours du 28 septembre. Sujet 2
Sans calculatrice évidemment!

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui inverser-la.
.....

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible? Si oui inverser-la.

3. Inverser en utilisant la méthode de Gauss :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Corrigé du sujet 1

1. Nous avons : $\det(A) = 1 \times (-3) - 2 \times 5 = -13 \neq 0$. La matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Nous avons : $\det(B) = 3 \times 10 - 6 \times 5 = 30 - 30 = 0$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
3. Par la méthode du pivot de Gauss,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 / (-1) \\ L_2 \leftarrow L_2 / (-2) \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 / (-1) \\ L_2 \leftarrow L_2 / (-2) \end{array} \end{aligned}$$

Nous avons $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2,5 & 1,5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé du sujet 2

1. Nous avons : $\det(A) = 5 \times (2) - (-3) \times 1 = 13 \neq 0$. La matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Nous avons : $\det(B) = 5 \times 6 - 10 \times 3 = 30 - 30 = 0$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
3. Par la méthode du pivot de Gauss, Nous avons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

Stratégiquement (mais il fallait le voir il peut être bien de soustraire L_3 à L_2 pour avoir un pivot de 1. Sinon faire $L_3 \rightarrow 3L_3 - 2L_2$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\ & \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.