

Nom :

Devoir à la maison de mathématiques de ECT2 à rendre le 5 octobre

Vous pouvez traiter qu'une partie du devoir. L'important n'est pas de recopier la copie d'un camarade ou la réponse de l'I.A. mais de comprendre comment il faut résoudre l'exercice. Je préfère un travail un peu maladroit qu'un travail qui n'est pas le votre.

Exercice 1 :**Partie I - Étude d'une matrice carrée**

Considérons les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer M^2 . Vérifier que : $2M^2 = M + I_2$.
 (b) Posons $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MU et MV et exprimer le résultat respectivement en fonction de U et de V
2. Posons $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
 (a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 (b) Montrer que $MP = PD$.
3. Montrer par récurrence que $M^n P = PD^n$.
4. Donner les quatre coefficients de D^n pour tout entier naturel n .
5. Dédurre des questions précédentes que pour tout entier naturel n nous avons :

$$M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Partie II - Étude d'un processus aléatoire

Considérons deux urnes U et V contenant deux jetons, l'un portant le numéro 0 et l'autre le numéro 1. Procédons à des échanges successifs de jetons. Plus précisément, lors de chaque étape, choisissons au hasard un jeton dans l'urne U et un dans l'urne V et nous les changeons d'urne.

Par exemple, si lors du premier échange nous choisissons le jeton 0 dans l'urne U et le jeton 1 dans l'urne V alors après échange, l'urne U contiendra deux jetons 1 et l'urne V deux jetons 0.

Pour tout entier naturel n , considérons les événements :

- A_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient deux jetons 0 ».
- B_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient un jeton 0 et un jeton 1 ».
- C_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient deux jetons 1 ».

Notons a_n , b_n et c_n les probabilités respectives de A_n , B_n et C_n . Au vu de la configuration initiale, nous pouvons dire que : $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

6. (a) Montrer que $a_1 = \frac{1}{4}$. Calculer de même b_1 et c_1 .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$. Calculer de même $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.

En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n$ et

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

(c) Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $b_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}b_n$.

8. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $X_{n+1} = MX_n$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $X_n = M^n X_0$.

(c) En utilisant le 3.c) de la partie I, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

(d) Déterminer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n , et c_n en fonction de n .

Corrigé du DM1 : ECT2

(BSB 2022)

Partie I - Étude d'une matrice carrée

1. (a) Je calcule le produit M^2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}.$$

Puis je compare $2M^2$ et $M + I_2$:

$$2M^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien vérifié l'égalité matricielle $\boxed{2M^2 = M + I_2}$.

- (b) Je calcule le produit entre M et les matrices colonnes U et V :

$$MU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{U}$$

et

$$MV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{1}{2} V}.$$

2. (a) La matrice P est une matrice carrée de taille 2. Je calcule son déterminant :
 $ad - bc = 3 \times 1 - 0 \times 2 = 3 - 0 = 3$. Comme il est non nul, j'en déduis que la matrice P est inversible et son inverse est donné par

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}.$$

- (b) Je calcule les produits MP et PD :

$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 - 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $\boxed{MP = PD}$.

3. (a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n$: «

$$M^n P = PD^n \text{ »}.$$

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$$M^0 P = I_2 P = P \text{ et } PD^0 = PI_2 = P.$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $M^n P = PD^n$ et nous voulons montrer : $M^{n+1} P = PD^{n+1}$.

D'après la question précédente : $M = PDP^{-1}$ et nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$M^{n+1} P = M \times M^n P = PDP^{-1} PD^n = PDPP^{-1} D^n = PD I_2 D^n = PD \times D^n = PD^{n+1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $M^n P = PD^n$.

- (b) Comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

- (c) D'après la question 3.a), je sais que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $M^n P = PD^n$. En particulier, $M^n = PD^n P^{-1}$. Finalement je calcule le produit $PD^n P^{-1}$:

$$PD^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

et

$$M^n = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie II – Étude d'un processus aléatoire

4. (a) Dans chaque urne, chaque jeton a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être tiré. Puisqu'il y a deux urnes, quatre tirages sont possibles en tout :

- Le jeton 0 est tiré dans l'urne U et le jeton 0 est tiré dans l'urne V : rien ne change, l'urne U contient toujours un jeton 0 et un jeton 1 et l'événement B_1 est vérifié.
- Le jeton 0 est tiré dans l'urne U et le jeton 1 est tiré dans l'urne V : après échange, l'urne U contient deux jetons 1 et aucun jeton 0 et l'événement C_1 est vérifié.
- Le jeton 1 est tiré dans l'urne U et le jeton 0 est tiré dans l'urne V : après échange, l'urne U contient deux jetons 0 et aucun jeton 1 et l'événement A_1 est vérifié.
- Le jeton 1 est tiré dans l'urne U et le jeton 1 est tiré dans l'urne V : rien ne change, l'urne U contient toujours un jeton 0 et un jeton 1 et l'événement B_1 est vérifié.

Ces quatre tirages étant équiprobables, j'obtiens ainsi que

$$a_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}, \quad b_1 = P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c_1 = P(C_1) = \frac{1}{4}.$$

- (b) Soit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. La probabilité conditionnelle $P_{A_n}(B_{n+1})$ représente la probabilité de revenir à la configuration initiale lorsque l'urne U contient deux jetons 0. Mais alors l'urne V contient deux jetons 1 et le tirage sera nécessairement « Un jeton 0 est tiré dans l'urne U et un jeton 1 est tiré dans l'urne V », ce qui ramène bien les urnes à leur état initial avec un jeton 0 et un jeton 1 dans chacune d'entre elles. Donc je conclus bien que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$, et pour la même raison, $P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$. Pour $P_{B_n}(B_{n+1})$, le fait que l'événement B_n soit réalisé indique que les deux urnes sont dans leurs configurations initiales. Ainsi $P_{B_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{2}$. Finalement, d'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n. \end{aligned}$$

- (c) D'après les explications données précédemment, puisqu'une configuration avec les deux même jetons dans chaque urne ramène toujours à la configuration initiale, alors :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0, P_{A_n}(C_{n+1}) = 0, P_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \text{ et } P_{C_n}(C_{n+1}) = 0.$$

De même, puisque la réalisation de l'événement B_n indique que les deux urnes sont dans leurs configurations initiales, $P_{B_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{1}{4}$ et $P_{B_n}(C_{n+1}) = P(C_1) = \frac{1}{4}$. Finalement, d'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= P(C_{n+1}) = P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4}b_n. \end{aligned}$$

5. (a) Pour tout entier naturel n , les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements donc

$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1, \text{ c'est-à-dire } a_n + b_n + c_n = 1.$$

- (b) En réécrivant la formule obtenue à la question 4.b) de sorte à faire apparaître $a_n + b_n + c_n$, j'obtiens bien que

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n = a_n + b_n + c_n - \frac{1}{2}b_n = 1 - \frac{1}{2}b_n.$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit MX_n :

$$MX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{2}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Grâce à la formule de récurrence obtenue précédemment pour la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, je retrouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

(b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $\mathcal{P}_n$: «

$$X_n = M^n X_0$$

Initialisation : Nous montrons $\mathcal{P}_0$.

$$M^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0.$$

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ et nous supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Nous avons donc $X_n = M^n X_0$ et nous voulons montrer : $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$

D'après la question précédente : $X_{n+1} = M X_n$ et nous avons, par hypothèse de récurrence :

$$X_{n+1} = M X_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = M^n X_0$.

(c) D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la probabilité b_n est donnée par la seconde coordonnée de la matrice colonne $X_n = M^n X_0$. Je connais la matrice M^n grâce à la question 3.c) de la Partie I et

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Je calcule alors le produit $M^n X_0$:

$$M^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$.

(d) Je sais déjà que $a_0 = c_0 = 0$. Puis par la question 4.c), pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right).$$

Je remarque alors que pour $n = 0$, cette formule reste valable puisque

$$\frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \right) = \frac{1}{12} (2 - 2) = 0.$$

Ainsi pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \text{ et } c_n = \frac{1}{12} \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right).$$